

HAUPTAUFSÄTZE

Über das Restglied der Mittelwertformeln für angenäherte Quadratur

Von W. Tollmien in Göttingen

Für die Quadraturformeln nach dem Mittelwertverfahren werden die exakten Restglieder in Integralform auf eine möglichst einfache Weise hergeleitet. Diese Restglieder enthalten von der näherungsweise zu integrierenden Funktion Ableitungen beliebig wählbarer Ordnung sowie die periodischen Bernoullischen Funktionen.

The remainder terms of quadrature formulas expressed in the exact form of integrals are deduced in a most simple manner. Derivatives of the approximately integrated function of an arbitrary order and the periodic Bernoulli's functions are contained in these remainder terms.

В этой работе выводятся наиболее простым образом точные выражения, имеющие форму интеграла, для остаточных членов в формулах для приближенного вычисления интегралов. Эти остаточные члены содержат производные любого порядка от подинтегральной функции и кроме того периодические функции Бернулли.

Die Mittelwertverfahren zur angenäherten Quadratur approximieren das Integral durch ein lineares Aggregat von Werten des Integranden für einige ausgezeichnete Argumente, so daß eine solche Formel bei einem über das Intervall 1 erstreckten Integral in der folgenden Weise geschrieben werden kann:

$$\int_0^1 F(u) du \approx \sum_{v=1}^n A_v F(u_v), \quad 0 \leq u_v \leq 1 \quad \dots \quad (1).$$

Die Gewichte A_v werden nun so bestimmt, daß die Quadraturformel Polynome bis zum Grade $m-1$ exakt integriert, woraus m Beziehungen zwischen den Gewichten A_v und den ausgezeichneten Argumenten u_v folgen:

$$\sum_{v=1}^n A_v u_v^p = \frac{1}{p+1}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad \dots \quad (2).$$

Bei den meisten Quadraturformeln, etwa denen vom Cotesschen Typ, ist $m=n$ oder $n+1$, bei den Gaußschen Formeln ist $m=2n$.

Es ist sehr bekannt, daß man das Restglied der Euler-Maclaurinschen Quadraturformel exakt mit Hilfe der Bernoullischen Polynome¹⁾ ausdrücken kann. W. Wirtinger²⁾ hat seine Herleitung dieses Zusammenhanges sinngemäß auf die Feststellung eines exakten Restgliedes für beliebige Quadraturformeln, die nach dem Mittelwertverfahren arbeiten, übertragen. Das Wirtingersche Restglied enthält die m -te Ableitung des Integranden F und die periodischen Bernoullischen Funktionen³⁾, die sich aus den Bernoullischen Polynomen im Grundintervall $0 \dots 1$ durch periodische Fortsetzung ergeben.

Die nachstehenden Bemerkungen, die ich im Sommersemester 1948 in Göttingen vortrug, verfolgten das einfache Ziel, das genannte Restglied möglichst direkt herzuleiten. Insbesondere wird der üblicherweise eingeschlagene Weg über die Fourierentwicklungen der periodischen Bernoullischen Funktionen vermieden. Weiter wird das Restglied mittels einer Ableitung von F von niedrigerer als der m -ten Ordnung ausgedrückt. Da die höheren Ableitungen der Integranden F oft schwer zugänglich sind, besteht eine dringende Notwendigkeit, derartige Restglieder mit beliebig niedrigen Ableitungen von F aufzustellen, worauf R. v. Mises⁴⁾ besonders hingewiesen hat. Die Lösung dieser Aufgabe wurde wesentlich durch das anregende Buch von G. Kowa-

¹⁾ Vgl. etwa K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 3. Aufl. Berlin 1931, S. 541.

²⁾ W. Wirtinger, Über das Fehlerglied bei numerischer Integration. Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 166—168.

³⁾ In der Bezeichnungsweise schließe ich mich dem Werk von J. F. Steffensen, Interpolation, Kopenhagen 1925, Baltimore 1927, § 14, an.

⁴⁾ R. v. Mises. Zur mechanischen Quadratur. Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 53—56.

lewski⁵⁾ gefördert. In den folgenden Ausführungen ist wenig Gewicht auf Neuartigkeit gelegt, sondern das Hauptanliegen ist die Klärung des Zusammenhanges verschiedener Restgliedformeln und die möglichst naturgemäße Einführung der periodischen Bernoullischen Funktionen in die Restglieddarstellungen.

1. Aufstellung eines ersten Restgliedes

Wir gehen bei unseren Betrachtungen von einem Restglied aus, das die erste Ableitung von F enthält. Da

$$F(u_\nu) = F(0) + \int_0^{u_\nu} F'(z) dz, \quad \int_0^1 F(u) du = F(0) + \int_0^1 F'(z) (1-z) dz, \quad \sum_{\nu=1}^n A_\nu = 1$$

ist, so wird dies Restglied

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \int_0^1 F'(z) (1-z) dz - \sum_{\nu=1}^n A_\nu \int_0^{u_\nu} F'(z) dz \\ &= \sum_{\nu=1}^n A_\nu \left\{ \int_0^1 F'(z) (1-z) dz - \int_0^{u_\nu} F'(z) dz \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Um ein einziges Integral zu erhalten, wird die Funktion σ eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(u_\nu - z) &= 1 & \text{für} & \quad 0 \leq z \leq u_\nu \\ \sigma(u_\nu - z) &= 0 & \text{für} & \quad u_\nu < z \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Damit wird

$$R_1 = \int_0^1 F'(z) \sum_{\nu=1}^n A_\nu \{ (1-z) - \sigma(u_\nu - z) \} dz \dots \dots \dots (5).$$

Dies Restglied soll nun mittels der periodischen Bernoullischen Funktionen ausgedrückt und durch partielle Integration umgeformt werden.

2. Einführung und Eigenschaften der periodischen Bernoullischen Funktionen

Die Bernoullischen Polynome $B_k(v)$ werden durch drei Festsetzungen definiert:

$$\frac{dB_k(v)}{dv} = k B_{k-1}(v), \quad k \geq 1 \dots \dots \dots (6)$$

$$\int_0^1 B_k(v) dv = 0, \quad k \geq 1 \dots \dots \dots (7)$$

$$B_0(v) = 1 \dots \dots \dots (8).$$

Die nächsten vier Bernoullischen Polynome lauten danach:

$$\begin{aligned} B_1(v) &= v - \frac{1}{2}, & B_2(v) &= v^2 - v + \frac{1}{6}, \\ B_3(v) &= v^3 - \frac{3}{2}v^2 + \frac{1}{2}v, & B_4(v) &= v^4 - 2v^3 + v^2 - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Die Werte der Bernoullischen Polynome bei $v=0$ sind die Bernoullischen Zahlen B_k :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0 \dots$$

Einige sich fast unmittelbar aus den Definitionsgleichungen ergebende Eigenschaften der Bernoullischen Polynome im Grundintervall $0 \leq v \leq 1$ seien hier zusammengestellt. Da für $k \geq 2$

$$\int_0^1 B_{k-1}(v) dv = 0 = \frac{1}{k} [B_k(1) - B_k(0)],$$

so ist

$$B_k(1) = B_k(0) = B_k \quad \text{für} \quad k \geq 2 \dots \dots \dots (9).$$

⁵⁾ G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur. Leipzig und Berlin 1932.

Vom $B_1(v)$ ausgehend erkennt man, daß die Bernoullischen Polynome gerader Ordnung gerade Funktionen von $v - \frac{1}{2}$ sind, die Bernoullischen Polynome ungerader Ordnung dagegen ungerade Funktionen von $v - \frac{1}{2}$. Zusammen mit der Beziehung (9) ergibt die letztere Eigenschaft, daß die Bernoullischen Polynome ungerader Ordnung außer bei $v = \frac{1}{2}$ auch bei $v = 0$ und $v = 1$ verschwinden, wobei $B_1(v)$ auszunehmen ist. Daß die Bernoullischen Polynome ungerader Ordnung keine weiteren Nullstellen außer denen bei $v = 0, \frac{1}{2}$ und 1 haben, läßt sich leicht aus dem Widerspruch zeigen, den die Annahme einer weiteren Nullstelle nach dem Rolleschen Satz ergeben würde, wenn man gemäß (6) von Bernoullischen Polynomen höherer Ordnung zu solchen niedrigerer Ordnung herabsteigt. Daraus folgt, daß die Bernoullischen Polynome gerader Ordnung im Inneren des Grundintervalls ein einziges Extremum und zwar bei $v = \frac{1}{2}$ haben. Hieraus kann man den für Abschätzungen wichtigen Schluß ziehen, daß

$$B_{2\lambda}(v) - B_{2\lambda}$$

im Grundintervall einheitliches Vorzeichen hat. Beiläufig sei bemerkt, daß die Bernoullischen Polynome gerader Ordnung zwei Nullstellen im Grundintervall haben. Das Aussehen der ersten Bernoullischen Polynome kann für das Intervall $0 \leq v \leq 1$ der Abb. 1 entnommen werden.

Die periodischen Bernoullischen Funktionen $\bar{B}_k(v)$ stimmen im Grundintervall mit den Bernoullischen Polynomen überein und haben die Periode 1:

$$\bar{B}_k(v) = B_k(v) \quad \text{für } 0 \leq v < 1$$

$$\bar{B}_k(v+1) = \bar{B}_k(v) \quad \text{für alle } v.$$

$\bar{B}_k(v)$ hat stetige Differentialquotienten bis zur Ordnung $k-2$, Unstetigkeiten im $k-1$ -ten Differentialquotienten bei $v=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Die periodischen Bernoullischen Funktionen gerader Ordnung sind gerade Funktionen von v , die ungerader Ordnung ungerade Funktionen. Bild 1 zeigt die ersten vier periodischen Bernoullischen Funktionen.

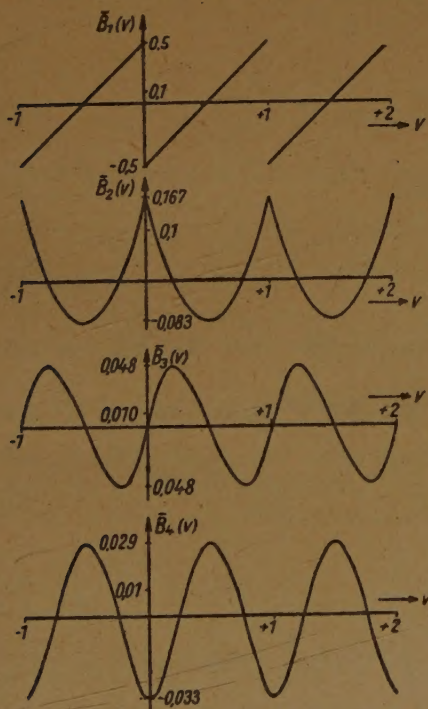


Bild 1

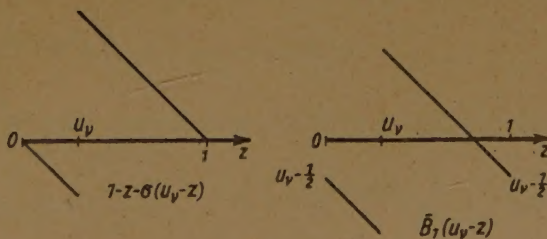


Bild 2

3. Aufstellung der allgemeinen Restgliederung in Integralform

Nach diesen Vorbereitungen, welche die periodischen Bernoullischen Funktionen der Anschauung möglichst nahebringen sollten, ist es leicht möglich, die Restglieder der Quadraturformeln mittels periodischer Bernoullischer Funktionen auszudrücken. Für die in dem Kern des Restgliedintegrals R_1 nach (5) auftretende Funktion gilt:

$$1 - z - \sigma(u_v - z) = \frac{1}{2} - u_v + \bar{B}_1(u_v - z) \dots \dots \dots (10),$$

wofür man auch das Bild 2 vergleichen möge. Setzt man diese Beziehung in R_1 ein und berücksichtigt, daß nach der ersten und zweiten Gleichung des Bedingungssystems (2)

$$\sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \left(\frac{1}{2} - u_{\nu} \right) = 0$$

ist, so erhält man

$$R_1 = \int_0^1 F'(z) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \bar{B}_1(u_{\nu} - z) dz \quad \dots \quad (11).$$

Durch partielle Integration erhält man die weiteren Restgliedformen, welche andere Ableitungen von F enthalten. Zunächst bekommt man

$$\begin{aligned} R_2 = & -\frac{1}{2} F'(1) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \bar{B}_2(u_{\nu} - 1) + \frac{1}{2} F'(0) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} B_2(u_{\nu}) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 F''(z) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \bar{B}_2(u_{\nu} - z) dz. \end{aligned}$$

Nun ist wegen der Periodizität

$$\bar{B}_2(u_{\nu} - 1) = B_2(u_{\nu}),$$

und wegen der exakten Gültigkeit der Quadraturformel für Polynome 2. Grades:

$$\sum_{\nu=1}^n A_{\nu} B_2(u_{\nu}) = \int_0^1 B_2(u) du = 0,$$

wenn $m-1 \leq 2$ ist. Danach wird

$$R_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 F''(z) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \bar{B}_2(u_{\nu} - z) dz \quad \dots \quad (12).$$

Durch Fortsetzung dieser Schlußweise erhält man allgemein

$$R_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 F^{(p)}(z) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \bar{B}_p(u_{\nu} - z) dz \quad \dots \quad (13),$$

falls $p \leq m-1$. Damit ist das Restglied in Integralform mittels einer beliebig niedrigen Ableitung von F ausgedrückt, was erstrebt war.

Will man das Restglied mittels der m -ten Ableitung von F ausdrücken, so hat man das letzte Restglied der Form (13), nämlich

$$R_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 F^{(m-1)}(z) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \bar{B}_{m-1}(u_{\nu} - z) dz \quad \dots \quad (14)$$

durch partielle Integration umzuformen. Man erhält:

$$R_m = -\frac{1}{m!} [F^{(m-1)}(1) - F^{(m-1)}(0)] \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} B_m(u_{\nu}) + \frac{1}{m!} \int_0^1 F^{(m)}(z) \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \bar{B}_m(u_{\nu} - z) dz \quad (15).$$

*Das Polynom $B_m(u)$, das mit u^m als höchster Potenz beginnt, wird durch die Quadraturformel nur mehr angenähert integriert, und zwar ist der Fehler:

$$\int_0^1 u^m du - \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} u_{\nu}^m = \frac{1}{m+1} - \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} u_{\nu}^m.$$

Also ist

$$\sum_{\nu=1}^n A_{\nu} B_m(u_{\nu}) + \frac{1}{m+1} - \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} u_{\nu}^m = \int_0^1 B_m(u) du = 0 \quad \dots \quad (16).$$

Folglich ist

$$R_m = \frac{1}{m!} \left[F^{(m-1)}(1) - F^{(m-1)}(0) \right] \cdot \left[\frac{1}{m+1} - \sum_{\nu=1}^n A_\nu u_\nu^m \right] + \frac{1}{m!} \int_0^1 F^{(m)}(z) \sum_{\nu=1}^n A_\nu \bar{B}_m(u_\nu - z) dz \quad \dots \dots (17),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$R_m = \int_0^1 F^{(m)}(z) \frac{1}{m!} \left\{ \frac{1}{m+1} - \sum_{\nu=1}^n A_\nu u_\nu^m + \sum_{\nu=1}^n A_\nu \bar{B}_m(u_\nu - z) \right\} dz \quad \dots \dots (18).$$

4. Einige Anwendungen

Einige Anwendungen der hergeleiteten Restgliedformeln auf die Simpsonsche Formel und die Trapezregel mögen zur Erläuterung zusammengestellt werden.

Für die Simpsonsche Regel ist

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = 1, \\ A_1 = \frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{2}{3}, \quad A_3 = \frac{1}{6}$$

und $m = 4$. Nach (12) wird das Restglied mit der zweiten Ableitung von F :

$$R_2 = \int_0^1 F''(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} \bar{B}_2(-z) + \frac{2}{3} \bar{B}_2\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{6} B_2(1-z) \right\} dz \quad \dots \dots (19). \\ = \int_0^1 F''(z) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} B_2(z) + \frac{2}{3} \bar{B}_2\left(\frac{1}{2} - z\right) \right\} dz$$

Bezeichnen wir den Kern dieses Restgliedintegrals mit

$$\psi_2(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} B_2(z) + \frac{2}{3} \bar{B}_2\left(\frac{1}{2} - z\right) \right\} \quad \dots \dots (20),$$

so wird

$$\psi_2(z) = \frac{1}{2} z \left(z - \frac{1}{3} \right) \quad \text{für} \quad z \leq \frac{1}{2} \\ \psi_2(z) = \frac{1}{2} (z-1) \left(z - \frac{2}{3} \right) \quad \text{für} \quad z \geq \frac{1}{2} \quad \dots \dots (21).$$

Auf anderem Wege war diese spezielle Formel von G. Kowalewski l. c. S. 136 hergeleitet. $\psi_2(z)$ ist in Bild 3 dargestellt.

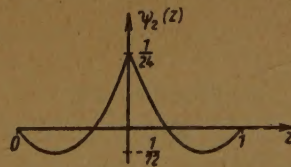


Bild 3

Will man das Restglied der Simpsonschen Formel mittels der vierten Ableitung von F ausdrücken, so erhält man nach (17):

$$R_4 = -\frac{1}{2880} [F''''(1) - F''''(0)] + \frac{1}{72} \int_0^1 F''''(z) \left\{ B_4(z) + 2 \bar{B}_4\left(\frac{1}{2} - z\right) \right\} dz \quad \dots (22).$$

Das Integral kann man durch partielle Integration noch weiter umformen, wonach man schließlich unter Beachtung der Nullstellen von $B_5(z)$ auf die Restgliedform:

$$R_4 = -\frac{1}{2880} [F''''(1) - F''''(0)] - \frac{1}{360} \int_0^1 F^{(5)}(z) \left\{ B_5(z) - 2 \bar{B}_5\left(\frac{1}{2} - z\right) \right\} dz \quad \dots (23)$$

kommt. Der erste Teil ist das Chevillietsche Restglied, mit dessen Hinzunahme zur Simpsonschen Formel noch Polynome 5. Grades exakt integriert werden, da

$$\int_0^1 \left\{ B_5(z) - 2 \bar{B}_5\left(\frac{1}{2} - z\right) \right\} dz = 0$$

wird.

Bei der Trapezregel ist $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $m = 2$. Nach der Restgliedformel (15) erhält man

$$\int_0^1 F(u) du = \frac{F(0) + F(1)}{2} - \frac{B_2}{2!} [F'(1) - F'(0)] + \frac{1}{2!} \int_0^1 F''(z) B_2(z) dz \quad \dots \quad (24).$$

Indem man das letzte Integral durch partielle Integration entwickelt und das Verschwinden der Bernoullischen Zahlen ungerader Ordnung beachtet, erhält man die Euler-Maclaurinsche Quadraturformel:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 F(u) du &= \frac{F(0) + F(1)}{2} - \frac{B_2}{2!} [F'(1) - F'(0)] \\ &\quad - \frac{B_4}{4!} [F'''(1) - F'''(0)] \dots - \frac{B_{2\lambda}}{(2\lambda)!} [F^{(2\lambda-1)}(1) - F^{(2\lambda-1)}(0)] \\ &\quad - \frac{1}{(2\lambda+1)!} \int_0^1 F^{(2\lambda+1)}(z) B_{2\lambda+1}(z) dz \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (25).$$

Für das exakt in Integralform angegebene Restglied kann man leicht eine Abschätzung geben. Es wird durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{(2\lambda+1)!} \int_0^1 F^{(2\lambda+1)}(z) B_{2\lambda+1}(z) dz &= - \frac{1}{(2\lambda+2)!} B_{2\lambda+2} [F^{(2\lambda+1)}(1) - F^{(2\lambda+1)}(0)] \\ &+ \frac{1}{(2\lambda+2)!} \int_0^1 F^{(2\lambda+2)}(z) B_{2\lambda+2}(z) dz = \frac{1}{(2\lambda+2)!} \int_0^1 F^{(2\lambda+2)}(z) [B_{2\lambda+2}(z) - B_{2\lambda+2}] dz. \end{aligned}$$

Da nach einem der aufgeführten Sätze über Bernoullischen Polynome gerader Ordnung

$$B_{2\lambda+2}(z) - B_{2\lambda+2}$$

einheitliches Vorzeichen hat, so wird nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung das Restglied gleich

$$\frac{1}{(2\lambda+2)!} F^{(2\lambda+2)}(\xi) \int_0^1 [B_{2\lambda+2}(z) - B_{2\lambda+2}] dz = - \frac{B_{2\lambda+2}}{(2\lambda+2)!} F^{(2\lambda+2)}(\xi) \quad \dots \quad (26),$$

wo $0 \leq \xi \leq 1$ ist.

5. Schlußbemerkung

Es sei bemerkt, daß U. Wegner⁶⁾ auf anderem Wege auch das Restglied der Lagrangeschen Interpolationsformel mit Hilfe der periodischen Bernoullischen Funktionen ausgedrückt hat, woraus natürlich die Restglieder der Quadraturformeln ebenfalls gewonnen werden können. Nachdrücklich sei auch auf den Vortrag von E. Weinell⁷⁾ auf der Göttinger GAMM-Tagung 1948 über das Restglied der Lagrangeschen Interpolationsformel und der Formeln zur numerischen Differentiation und Integration hingewiesen, wobei aber in den Integraldarstellungen der Restglieder die periodischen Bernoullischen Funktionen nicht zur Anwendung kamen.

⁶⁾ U. Wegner, Zur Theorie der Interpolation. Dtsch. Mathematik, Jahrg. 1 (1936), S. 103—107 und S. 352—358.

⁷⁾ E. Weinell, Über das Restglied der Lagrangeschen Interpolationsformel und der Formeln zur numerischen Differentiation und Integration. Vortrag auf der Göttinger GAMM-Tagung, September 1948. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 32/33.

Eingegangen: 25. 10. 1948.

Differenzenverfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Von L. Collatz in Hannover

Es werden zur numerischen Berechnung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung zwei Extrapolationsverfahren und zwei Interpolationsverfahren angegeben, welche die meisten bisher bekannten Arten der Differenzenverfahren für Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung als Spezialfälle enthalten. Unter den verschiedenen Verfahren zeichnet sich auch bei Differentialgleichungen höherer Ordnung das Verfahren der zentralen Differenzen durch einfache Koeffizienten und günstigere Konvergenzbedingungen aus.

For the numerical computation of initial value problems of ordinary differential equations of the n -th order, two methods of extrapolation and two others of interpolation are stated, which contain most of the difference methods hitherto known for differential equations of the first and the second order as special cases. Among the several methods, the central difference method is distinguished by simpler coefficients and more favourable criteria of convergence also in the case of differential equations of a higher order.

Для численного решения простых дифференциальных уравнений n -ного порядка с начальными граничными условиями даются два экстраполяционных и два интерполяционных метода, которые содержат в себе в виде частных случаев почти все существующие до сих пор методы решения в конечных разностях дифференциальных уравнений первого и второго порядка. И в случае дифференциальных уравнений более высокого порядка метод центральных конечных разностей отличается от других методов наибольшей простотой коэффициентов и более удобными признаками сходимости.

1. Einführung

Für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen sind die Verfahren, welche Differenzenschemata benutzen, in steigendem Maße verwendet worden, und zwar hauptsächlich die Extra- und Interpolationsverfahren von Adams, Störmer, Nyström u. a. für Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Im folgenden sollen verschiedene Arten der Durchführung für Differentialgleichungen n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \dots \dots \dots (1)$$

besprochen werden:

Es liegt an sich nahe, eine Differentialgleichung n -ter Ordnung auf ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückzuführen:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = y_4, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = y_n, \quad y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n),$$

und dieses mit den für Differentialgleichungen erster Ordnung bekannten Verfahren zu behandeln. Jedoch wird dadurch nicht nur die Rechenarbeit größer (z. B. hat man dann n Differenzenschemata), sondern es leidet dabei auch die Genauigkeit; beim Differenzenverfahren sinkt die Genauigkeit infolge des n -maligen Einsetzens der Funktionsverläufe durch Polynome um ganze h -Potenzen der Taylor-Entwicklung¹⁾. So bietet die Behandlung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung grundsätzliche Vorteile gegenüber der eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung, und es ist zu empfehlen, ein System von Differentialgleichungen niedriger Ordnung zur numerischen Behandlung in ein System von weniger Differentialgleichungen höherer Ordnung zu verwandeln, sofern diese Umwandlung analytisch bequem durchführbar ist, und dabei die Funktionsausdrücke in den Differentialgleichungen nicht etwa zu kompliziert werden.

Zur Festlegung einer bestimmten Lösung der Differentialgleichung (1) seien für $x = x_0$ Anfangswerte vorgegeben:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \dots \dots \dots (2).$$

Die Funktion f der Differentialgleichung (1) genüge in einem konvexen Bereich \mathfrak{B} des $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ -Raumes, in dem die Lösungsfunktion und alle Näherungen enthalten sind, einer Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} & |f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - f(x, y^*, y'^*, \dots, y^{(n-1)*})| \dots \dots \dots (3) \\ & \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} K_{\nu} |y^{(\nu)} - y^{(\nu)*}| \end{aligned}$$

für alle Punktpaare $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ und $y^*, y'^*, \dots, y^{(n-1)*}$ aus \mathfrak{B} . Für praktische Zwecke

¹⁾ L. Collatz — R. Zurmühl, Zur Genauigkeit verschiedener Integrationsverfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ing.-Arch. 13 (1942), S. 34—36.

wird man oft setzen:

$$K_\nu = \left| \frac{\partial f}{\partial y^{(\nu)}} \right| \max \text{ in } \mathfrak{R} \dots \dots \dots (4).$$

Überhaupt verlaufen die Überlegungen bei Differentialgleichungen höherer Ordnung ähnlich denen bei Gleichungen erster und zweiter Ordnung²⁾, so daß wir uns hier kürzer fassen können.

Wie bei den Gleichungen erster und zweiter Ordnung besteht die Rechnung aus zwei ganz getrennten Schritten: 1. Man muß sich zunächst mehrere Näherungswerte für y und seine Ableitungen und damit für die Funktion f , die in der Differentialgleichung (1) auftritt, verschaffen (Berechnung des „Anfangsstückes“). 2. Bei der „fortlaufenden Rechnung“ werden die Werte von y und seinen Ableitungen an der Stelle x_{r+1} ermittelt, wenn die Werte bei $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, \dots$ bekannt sind. Es werden mehrere Rechnungsarten angegeben

2. Hilfsformeln aus der Differenzenrechnung

Um später die Gedankengänge nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir hier einige nachher gebrauchte Hilfsformeln zusammen. Es seien $f_k = f(x_k)$ die Funktionswerte einer Funktion $f(x)$ an äquidistanten Stellen $x_k = x_0 + kh$ (für $k = 0, 1, 2, \dots, N$, manchmal auch nicht ganzzahlig) mit h als Maschenweite. Mit den üblichen Differenzenoperatoren

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= f_{k+1} - f_k \\ \nabla f_k &= f_k - f_{k-1} \end{aligned} \dots \dots \dots (5)$$

hat man die bekannten Interpolationspolynome (mit der Abkürzung $u = \frac{x-x_0}{h}$): Das „Newtonsche Interpolationspolynom mit absteigenden Differenzen“:

$$N_p(x) = f_0 + \frac{u}{1!} \nabla f_0 + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+p-1)}{p!} \nabla^p f_0 \dots (6)$$

mit dem Restglied³⁾

$$R_{p+1}(x) = f(x) - N_p(x) = \frac{u(u+1) \dots (u+p)}{(p+1)!} h^{p+1} f^{(p+1)}(\xi) \dots \dots (7)$$

(mit ξ als geeigneter Zwischenstelle in einem Intervall der x -Achse, welches die Punkte $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-p}$ und x enthält), das „Newtonsche Interpolationspolynom mit aufsteigenden Differenzen“:

$$f(x) = f_0 + \frac{u}{1!} \Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{u}{p} \Delta^p f_0 + \binom{u}{p+1} h^{p+1} f^{(p+1)}(\xi) \dots (8)$$

und das Stirlingsche Interpolationspolynom, welches wir nur für gerade p aufschreiben:

$$\begin{aligned} St_p(x) = f_0 + u \frac{\nabla f_0 + \nabla f_1}{2} + \frac{u^2}{2!} \nabla^2 f_1 + \frac{u(u^2-1)}{3!} \frac{\nabla^3 f_1 + \nabla^3 f_2}{2} + \dots \\ + \frac{u^2(u^2-1) \dots \left(u^2 - \left(\frac{p}{2} - 1\right)^2\right)}{p!} \nabla^p f_{p/2} \dots \dots (9) \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$R_{p+1}(x) = f(x) - St_p(x) = \left(u + \frac{p}{2}\right) h^{p+1} f^{(p+1)}(\xi) \dots \dots \dots (10).$$

Aus dem Stirlingschen Interpolationspolynom gewinnt man die symmetrische Darstellung⁴⁾, bei

²⁾ R. v. Mises, Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 81–92. — G. Schulz, Interpolationsverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 44–59. — G. Schulz, Fehlerabschätzung für das Störmer'sche Integrationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 224–234. — W. Tollmien, Über die Fehlerabschätzung beim Adamsschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 83–90. — E. Lindelöf, Remarques sur l'integration numérique des équations différentielles ordinaires. Acta soc. sci. Fennicae A 2 (1938), Nr. 13, 21 S. — L. Collatz — R. Zurmühl, Beiträge zu den Interpolationsverfahren der numerischen Integration von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 42–55. — L. Collatz, Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Differentialgleichungssystemen. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 216–225.

³⁾ Vgl. z. B. Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis. Berlin und Leipzig 1928, hier insbesondere S. 77ff. und G. Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Sammlung Göschel, Bd. 1110. Leipzig und Berlin 1937.

⁴⁾ J. F. Steffensen, Interpolation, S. 29. Baltimore 1927.

der das Restglied von höherer Ordnung ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x_0 + uh) + f(x_0 - uh)}{2} &= f_0 + \frac{u^2}{2!} \nabla^2 f_1 + \frac{u^2(u^2 - 1)}{4!} \nabla^4 f_2 + \dots \\ &+ \frac{u^2(u^2 - 1) \dots \left(u^2 - \left(\frac{p}{2} - 1\right)^2\right)}{p!} \nabla^p f_{p/2} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

mit
$$R_p^{**} = \frac{u^2(u^2 - 1) \dots \left(u^2 - \frac{1}{4} p^2\right)}{(p + 2)!} h^{p+2} f^{(p+2)}(\xi) \dots (12).$$

3. Integrationen der Interpolationsformeln

Integriert man bei der Newtonschen Interpolationsformel (6), (7) die Funktion $f(x)$ über das Intervall von x_0 bis x (es ist $x = x_0 + uh$ gesetzt), so entsteht

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^x f(x) dx &= h \int_{x_0}^u N_p(x(u)) du + h \int_{x_0}^x R_{p+1} dx = f(x) - f(x_0) \\ &= h \left[u f_0 + \frac{u^2}{2} \nabla f_0 + \frac{3u^2 + 2u^3}{12} \nabla^2 f_0 + \dots \right] + R_{1,p+1} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

und bei n -facher Integration

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x \underbrace{f dx \dots dx}_{n\text{-fach}} &= {}^{(n)}f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} {}^{(n-p)}f(x) \frac{(x-x_0)^p}{p!} \\ &= h^n \sum_{q=0}^p P_{n,q}(u) \nabla^q f_0 + R_{n,p+1}(x) \end{aligned} \right\} \dots (14).$$

Dabei bedeutet ${}^{(v)}f$ ein v -faches unbestimmtes Integral der Funktion $f(x) = {}^{(0)}f$

$${}^{(v)}f = \int {}^{(v-1)}f dx \quad (v = 1, 2, \dots) \dots (15)$$

und es ist (mit $R_{0,p+1} = R_{p+1}$) gesetzt

$$R_{v,p+1} = \int_{x_0}^x R_{v-1,p+1} dx \quad (v = 1, 2, \dots) \dots (16)$$

und $P_{n,q}(u)$ erhält man durch n -fache Integration

$$\left. \begin{aligned} P_{n,q}(u) &= \int_0^u \dots \int_0^u \binom{u+q-1}{q} \frac{du \dots du}{n\text{-fach}} \quad \text{für } q \geq 1 \\ P_{n,0}(u) &= \frac{1}{n!} u^n \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, \dots) \dots (17).$$

Einige $P_{n,q}$ für kleine Werte von n und q sind in der Tabelle angegeben.

Polynome $P_{n,q}(u)$

	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$
$n = 1$	u	$\frac{1}{2} u^2$	$\frac{1}{12} (3u^2 + 2u^3)$	$\frac{1}{24} (4u^2 + 4u^3 + u^4)$	$\frac{1}{720} (90u^2 + 110u^3 + 45u^4 + 6u^5)$
$n = 2$	$\frac{1}{2} u^2$	$\frac{1}{6} u^3$	$\frac{1}{24} (2u^3 + u^4)$	$\frac{1}{360} (20u^3 + 15u^4 + 3u^5)$	$\frac{1}{1440} (60u^3 + 55u^4 + 18u^5 + 2u^6)$
$n = 3$	$\frac{1}{6} u^3$	$\frac{1}{24} u^4$	$\frac{1}{240} (5u^4 + 2u^5)$	$\frac{1}{720} (10u^4 + 6u^5 + u^6)$	$\frac{1}{10080} (105u^4 + 77u^5 + 21u^6 + 2u^7)$
$n = 4$	$\frac{1}{24} u^4$	$\frac{1}{120} u^5$	$\frac{1}{720} (3u^5 + u^6)$	$\frac{1}{5040} (14u^5 + 7u^6 + u^7)$	

Mit Einsetzen der oberen Grenze $x = x_1$ entsteht

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_0}^x \underbrace{f dx \cdots dx}_{n\text{-fach}} = {}^{(n)}f(x_1) - \sum_{\nu=0}^{n-1} {}^{(n-\nu)}f(x_0) \frac{h^\nu}{\nu!} = h^n \sum_{\varrho=0}^p \beta_{n,\varrho} \nabla^\varrho f_0 + R_{n,p+1}(x_1) \quad (18).$$

Dabei bedeuten die Koeffizienten $\beta_{n,\varrho}$ die Zahlen

$$\beta_{n,\varrho} = P_{n,\varrho}(1) = \int_0^1 \int_0^u \cdots \int_0^u \binom{u+\varrho-1}{\varrho} \frac{du \cdots du}{n\text{-fach}} \quad (19).$$

Die ersten Zahlen $\beta_{n,\varrho}$ sind

Zahlen $\beta_{n,\varrho}$						
	$\varrho=0$	$\varrho=1$	$\varrho=2$	$\varrho=3$	$\varrho=4$	$\varrho=5$
$n=1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$
$n=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{19}{180}$	$\frac{3}{32}$	
$n=3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{240}$	$\frac{17}{720}$	$\frac{41}{2016}$	
$n=4$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{180}$	$\frac{11}{2520}$	$\frac{89}{24192}$	

In (18) läßt sich nach (7), (17) das Restglied abschätzen durch

$$|R_{n,p+1}(x_1)| \leq \beta_{n,p+1} h^{p+n+1} |f^{(p+1)}|_{\max} \quad (20).$$

Setzt man als obere Grenze $x = x_{-1}$, so entsteht

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{-1}} \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_0}^x \underbrace{f dx \cdots dx}_{n\text{-fach}} &= {}^{(n)}f(x_{-1}) - \sum_{\nu=0}^{n-1} {}^{(n-\nu)}f(x_0) \frac{(-h)^\nu}{\nu!} \\ &= (-1)^{n+\varrho} h^n \sum_{\varrho=0}^p \gamma_{n,\varrho} \nabla^\varrho f_0 + R_{n,p+1}(x_{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

Dabei ist

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{n,\varrho} &= (-1)^{n+\varrho} \int_0^{-1} \int_0^u \cdots \int_0^u \binom{u+\varrho-1}{\varrho} \frac{du \cdots du}{n\text{-fach}} \\ &= (-1)^{n+\varrho} P_{n,\varrho}(-1) \end{aligned} \right\} \quad (22).$$

Die ersten Zahlen $\gamma_{n,\varrho}$ sind

Zahlen $\gamma_{n,\varrho}$					
	$\varrho=0$	$\varrho=1$	$\varrho=2$	$\varrho=3$	$\varrho=4$
$n=1$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$
$n=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{45}$	$-\frac{7}{480}$
$n=3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{80}$	$\frac{1}{144}$	$-\frac{47}{10080}$
$n=4$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{360}$	$\frac{1}{630}$	

Natürlich kann man diese Zahlen $\gamma_{n,\varrho}$ auch durch Integration der Newtonschen Formel (8) mit aufsteigenden Differenzen $\Delta^\varrho f_0$ gewinnen.

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_0}^x \underbrace{f dx \cdots dx}_{n\text{-fach}} = {}^{(n)}f(x_1) - \sum_{\nu=0}^{n-1} {}^{(n-\nu)}f(x_0) \frac{h^\nu}{\nu!} = h^n \sum_{\varrho=0}^p \gamma_{n,\varrho} \Delta^\varrho f_0 + S \quad (23),$$

wobei für das Restglied S leicht eine Abschätzung durch Integration des Restgliedes in (8) aufgestellt werden kann.

$$|S| \leq \gamma_{n,p+1} h^{p+n+1} |f^{(p+1)}|_{\max}.$$

Außer diesen Koeffizienten werden noch andere Größen $\beta_{n,e}^*$ gebraucht. Dazu wird als untere Grenze x_{-1} an Stelle von x_0 in (13) bis (19) verwendet. Man erhält bei n -facher Integration

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_{-1}}^x \cdots \int_{x_{-1}}^x \underbrace{f dx \cdots dx}_{n\text{-fach}} &= {}^{(n)}f(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} {}^{(n-\nu)}f(x_{-1}) \frac{(x-x_{-1})^\nu}{\nu!} \\ &= h^n \sum_{e=0}^p P_{n,e}^*(u) \nabla^e f_0 + R_{n,p+1}^* \end{aligned} \right\} \dots \dots (24).$$

Dabei entstehen die Polynome $P_{n,e}^*$ durch n -fache Integration:

$$\left. \begin{aligned} P_{n,e}^*(u) &= \int_{-1}^u \cdots \int_{-1}^u \left(u + \frac{e-1}{e}\right) \frac{du \cdots du}{n\text{-fach}} \quad \text{für } e \geq 1 \\ P_{n,0}^*(u) &= \frac{1}{n!} (u+1)^n \end{aligned} \right\} (n=1, 2, \dots) \dots (25).$$

Die folgende Tafel gibt die Polynome $P_{n,e}^*$ für einige Werte von n und e :

Polynome $P_{n,e}^*(u)$.

	$e=0$	$e=1$	$e=2$
$n=1$	$u+1$	$\frac{1}{2}(u^2-1)$	$\frac{1}{12}(2u^3+3u^2-1)$
$n=2$	$\frac{1}{2}(u+1)^2$	$\frac{1}{6}(u^3-3u-2)$	$\frac{1}{24}(u^4+2u^3-2u-1)$
$n=3$	$\frac{1}{6}(u+1)^3$	$\frac{1}{24}(u^4-6u^2-8u-3)$	$\frac{1}{240}(2u^5+5u^4-10u^3-10u-3)$
$n=4$	$\frac{1}{24}(u+1)^4$	$\frac{1}{120}(u^5-10u^3-20u^2-15u-4)$	$\frac{1}{720}(u^6+3u^5-10u^3-15u^2-9u-2)$
	$e=3$		$e=4$
$n=1$	$\frac{1}{24}(u^4+4u^3+4u^2-1)$		$\frac{1}{720}(6u^5+45u^4+110u^3+90u^2-19)$
$n=2$	$\frac{1}{360}(3u^5+15u^4+20u^3-15u-7)$		$\frac{1}{1440}(2u^6+18u^5+55u^4+60u^3-38u-17)$
$n=3$	$\frac{1}{720}(u^6+6u^5+10u^4-15u^2-14u-4)$		
$n=4$	$\frac{1}{5040}(u^7+7u^6+14u^5-35u^3-49u^2-28u-6)$		

Für $x = x_0$ geht (24) über in

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_{-1}}^{x_0} \cdots \int_{x_{-1}}^{x_0} \underbrace{f dx \cdots dx}_{n\text{-fach}} &= {}^{(n)}f(x_0) - \sum_{\nu=0}^{n-1} {}^{(n-\nu)}f(x_{-1}) \frac{h}{\nu!} \\ &= h^n \sum_{e=0}^p \beta_{n,e}^* \nabla^e f_0 + R_{n,p+1}^*(x_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots (26).$$

Dabei bedeutet mit $R_{0,p+1}^* = R_{p+1}$

$$R_{\nu,p+1}^* = \int_{x_{-1}}^x R_{\nu-1,p+1} dx \quad (\nu=1, 2, \dots) \dots (27),$$

$$\beta_{n,e}^* = \int_{-1}^0 \int_{-1}^u \cdots \int_{-1}^u \left(u + \frac{e-1}{e}\right) \frac{du \cdots du}{n\text{-fach}} \dots (28).$$

Die ersten Zahlen $\beta_{n, \varrho}^*$ sind

Zahlen $\beta_{n, \varrho}^*$					
	$\varrho = 0$	$\varrho = 1$	$\varrho = 2$	$\varrho = 3$	$\varrho = 4$
$n = 1$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$
$n = 2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{7}{360}$	$-\frac{17}{1440}$
$n = 3$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{80}$	$-\frac{1}{180}$	$-\frac{11}{3360}$
$n = 4$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{360}$	$-\frac{1}{840}$	$-\frac{17}{24192}$

Durch Einsetzen der Definitionen beweist man

$$\beta_{n, \varrho} + \beta_{n, \varrho+1}^* = \beta_{n, \varrho+1} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (29).$$

Wegen $\beta_{n, 0} = \beta_{n, 0}^* = \frac{1}{n!}$ erhält man bei Addition der Gleichungen (29) für $\varrho = 0, 1, \dots, p-1$

$$\sum_{\varrho=0}^p \beta_{n, \varrho}^* = \beta_{n, p} \quad (30).$$

Für das Restglied $R_{n, p+1}^*(x_0)$ folgt wieder aus (7), (27), (28)

$$|R_{n, p+1}^*(x_0)| \leq |\beta_{n, p+1}^*| h^{p+n+1} |f^{(p+1)}|_{\max} \quad (31).$$

Schließlich erhalten wir bei mehrfacher Integration der Stirlingschen Interpolationsformel (10) mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} [f(x_0 + uh) + f(x_0 - uh)] \quad (32)$$

mit $x = x_1$ als oberer Grenze

$$\left. \begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x \underbrace{\Phi dx \dots dx}_{n\text{-fach}} = h^n \sum_{\varrho=0}^{\frac{p}{2}} \beta_{n, \varrho}^{*,*} \nabla^{2\varrho} f_{\varrho} + R_{n, p}^{*,*}(x_1) \\ & = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} [^{(n)}f(x_0 + uh) + ^{(n)}f(x_0 - uh)] - \sum_{\varrho=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{h^{2\varrho}}{(2\varrho)!} ^{(n-2\varrho)}f(x_0) \text{ für gerades } n \\ & \frac{1}{2} [^{(n)}f(x_0 + uh) - ^{(n)}f(x_0 - uh)] - \sum_{\varrho=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{h^{2\varrho+1}}{(2\varrho+1)!} ^{(n-1-2\varrho)}f(x_0) \text{ für ungerades } n \end{aligned} \right\} \quad (33). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet

$$\left. \begin{aligned} & R_{\nu, p}^{*,*} = \int_{x_0}^x R_{\nu-1, p}^{*,*} dx \quad (\nu = 1, 2, \dots) \\ & R_{0, p}^{*,*} = R_p^{**} \text{ nach (11)} \end{aligned} \right\} \quad (34).$$

Die ersten Zahlen $\beta_{n, \varrho}^{*,*}$ sind

Zahlen $\beta_{n, \varrho}^{*,*}$				
	$\varrho = 0$	$\varrho = 1$	$\varrho = 2$	$\varrho = 3$
$n = 1$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{180}$	$\frac{1}{1512}$
$n = 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{480}$	$\frac{31}{120960}$
$n = 3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{2016}$	
$n = 4$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{720}$	$-\frac{11}{120960}$	

Das Restglied $R_{n,p}^{**}$ kann nach (12) abgeschätzt werden durch (p war als gerade Zahl vorausgesetzt):

$$|R_{n,p}^{**}| \leq r_{n,p}^{**} \frac{h^{p+n+2}}{(p+2)!} |f^{(p+2)}|_{\max} \quad \dots \quad (35).$$

$$r_{n,p}^{**} = \int_0^1 \int_0^u \dots \int_0^u \left| u^2(u^2-1) \dots \left(u^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) \right| \underbrace{du \dots du}_{n\text{-fach}} \quad \dots \quad (35).$$

Die ersten Zahlen $r_{n,p}^{**}$ sind

Zahlen $r_{n,p}^{**}$		
	$p=2$	$p=4$
$n=1$	$\frac{2}{15}$	$\frac{10}{21}$
$n=2$	$\frac{1}{20}$	$\frac{31}{168}$
$n=3$	$\frac{1}{84}$	
$n=4$	$\frac{11}{5040}$	

4. Berechnung des Anfangsstückes

Es stehen im wesentlichen die gleichen Hilfsmittel wie für Differentialgleichungen erster Ordnung zur Verfügung:

I. Verwendung eines anderen Näherungsverfahrens. Auch hier wird man in erster Linie das Runge-Kutta-Verfahren heranziehen⁵⁾, und zwar wegen der beim Anfangsstück besonders wichtigen Genauigkeit am besten mit halber Schrittweite oder Viertelschrittweite.

II. Benutzung der Taylorschen Reihe für $y(x)$ und die Ableitungen.

III. Benutzung von Quadraturformeln. Man kann hierzu die Formeln (25), (33) verwenden:

$$y_1^{(m)} = y_0^{(m)} + \frac{h}{1!} y_0^{(m+1)} + \frac{h^2}{2!} y_0^{(m+2)} + \dots + \frac{h^{n-m-1}}{(n-m-1)!} y_0^{(n-1)} + h^{n-m} \sum_{\varrho=0}^p \gamma_{n-m,\varrho} \nabla^{\varrho} f_0 \quad (37).$$

Für eine Rechnung mit zweiten bzw. dritten Differenzen benötigt man noch Formeln für $y_2^{(m)}$ bzw. auch für $y_3^{(m)}$.

$$y_{r+1}^{(m)} = \left\{ \begin{array}{l} y_{r-1}^{(m)} + 2 \sum_{\varrho=0}^{\frac{n-m-3}{2}} \frac{h^{2\varrho+1}}{(2\varrho+1)!} y_r^{(m+2\varrho+1)} \\ 2 y_r^{(m)} - y_{r-1}^{(m)} + 2 \sum_{\varrho=1}^{\frac{n-m-2}{2}} \frac{h^{2\varrho}}{(2\varrho)!} y_r^{(m+2\varrho)} \\ + 2 h^{n-m} (\beta_{n,0}^{**} f_r + \beta_{n,1}^{**} \nabla^2 f_{r+1}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ ungerade} \\ n \text{ gerade} \end{array} \quad \dots \quad (38).$$

Diese Formeln verwendet man als Integrationsformeln, indem man sich zunächst Rohwerte für $y_1^{(m)}$, $y_2^{(m)}$, $y_3^{(m)}$ (etwa grob mit der Taylorschen Reihe bis zu drei Gliedern mit $y^{(n)}$ einschließlich) verschafft, dann f_1, f_2, f_3 und die Differenzen ausrechnet und diese Werte auf den rechten Seiten einsetzt, um die auf der linken Seite stehenden Werte dadurch in nächster Näherung zu erhalten. Wir beschreiben nun mehrere Verfahren der fortlaufenden Rechnung.

5. Extrapolationsverfahren

Es seien bis für die Stellen x_{ϱ} (für $\varrho = 1, \dots, r$) Näherungen $y_{\varrho}, y'_{\varrho}, \dots, y_{\varrho}^{(n-1)}$ für die exakten Werte $y(x_{\varrho}), y'(x_{\varrho}), \dots, y^{(n-1)}(x_{\varrho})$ bekannt, und es sollen Näherungen $y_{r+1}, y'_{r+1},$

⁵⁾ Formeln für Differentialgleichungen n -ter Ordnung wurden aufgestellt von R. Zurmühl, Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen n -ter Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 173–182.

..., $y_{r+1}^{(n-1)}$ ermittelt werden. Nach (18) gilt für die exakte Lösungsfunktion, wenn man dort n durch $n-m$, ferner x_0 durch x_r ersetzt und $y^{(n)} = f$ benutzt,

$$y^{(m)}(x_{r+1}) = \sum_{v=0}^{n-m-1} \frac{h^v}{v!} y^{(m+v)}(x_r) + h^{n-m} \sum_{q=0}^p \beta_{n-m,q} \nabla^q F(x_r) + R_{n-m,p+1} \quad (39),$$

wo $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = F(x) \dots \dots \dots (40)$

gesetzt ist, und für das Restglied die Abschätzung (20) gilt. Läßt man das Restglied R fort, so erhält man die Falknersche Extrapolationsformel⁶⁾ für Näherungswerte $y_{r+1}^{(m)}$:

$$y_{r+1}^{(m)} = \sum_{v=0}^{n-m-1} \frac{h^v}{v!} y_r^{(m+v)} + h^{n-m} \sum_{q=0}^p \beta_{n-m,q} \nabla^q f_r \dots \dots \dots (41).$$

Für $n=1$ ist die Adamssche Extrapolationsformel für Differentialgleichungen erster Ordnung als Spezialfall enthalten, für $n=2$ ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + h y'_r + h^2 \left[\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{6} \nabla f_0 + \frac{1}{8} \nabla^2 f_0 + \frac{19}{180} \nabla^3 f_0 + \dots \right] \\ y'_{r+1} &= y'_r + h \left[f_0 + \frac{1}{2} \nabla f_0 + \frac{5}{12} \nabla^2 f_0 + \frac{3}{8} \nabla^3 f_0 + \dots \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (42).$$

Allgemein sind die Koeffizienten $\beta_{n,q}$ durch (19) gegeben.

Es lassen sich noch auf mannigfache andere Arten Extrapolationsformeln aufstellen. Man kann z. B. durch Kombinationen Formeln aufstellen, in denen nur y - und f -Werte vorkommen, in denen also alle Zwischenableitungen eliminiert sind. (Solche Formeln sind besonders geeignet, wenn die Differentialgleichung die Form hat $y^{(n)} = f(x, y)$.) Zur Herleitung schreiben wir die Gl. (14) für die Argumente $x = x_1, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-n+1}$ an und multiplizieren diese Gleichungen einzeln mit den Faktoren $\binom{n}{0}, \binom{n}{2}, -\binom{n}{3}, \binom{n}{4}, -\binom{n}{5}, \dots, (-1)^n \binom{n}{n}$, multiplizieren also die Gleichung für $x = x_{-q}$ mit $(-1)^{q+1} \binom{n}{q+1}$. Addition dieser Gleichungen ergibt mit ${}^{(n)}f = y$

$$y(x_1) - \binom{n}{1} y(x_0) + \binom{n}{2} y(x_{-1}) - \dots + (-1)^n y(x_{-n+1}) = \nabla^n y(x_1) = h^n \sum_{q=0}^p \zeta_{n,q} \nabla^q f_0 + \bar{R} \quad (43)$$

mit

$$\zeta_{n,q} = P_{n,q}(1) + \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^{q+1} \binom{n}{q+1} P_{n,q}(-q) \dots \dots \dots (44)$$

und

$$\bar{R} = R_{n,p+1}(x_1) + \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^{q+1} \binom{n}{q+1} R_{n,p+1}(x_{-q}) \dots \dots \dots (45).$$

Die ersten Zahlen $\zeta_{n,q}$ sind:

Zahlen $\zeta_{n,q}$						
	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$
$n=1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$
$n=2$	1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{240}$	$\frac{3}{40}$
$n=3$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{240}$	
$n=4$	1	-1	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{720}$	

Die Formel (43) für Differentialgleichungen n -ter Ordnung enthält speziell bei Fortlassen der Restglieder für $n=1$ die Adamssche Extrapolationsformel und für $n=2$ die Störmersche Extrapolationsformel.

Bei Differentialgleichungen dritter Ordnung fallen wegen $\zeta_{32} = \zeta_{33} = 0$ die Glieder mit $\nabla^2 f$ und $\nabla^3 f$ heraus:

$$y_{r+1} = 3 y_r - 3 y_{r-1} + y_{r-2} + h^3 \left(f_r - \frac{1}{2} \nabla f_r + \frac{1}{240} \nabla^4 f + \dots \right) \dots \dots (46).$$

⁶⁾ V. M. Falkner, A method of numerical solution of differential equations. Philos. Mag. 7. ser., 21 (1936), S. 621-640.

Bricht man hier nach dem Gliede mit ∇f_r ab, so hat man eine sehr einfache und doch genaue Formel. Man braucht nur die ersten Differenzen mitzuführen (sofern man nicht wegen Auftretens von y' oder y'' in der Differentialgleichung und damit wegen der Formeln für y' oder y'' höhere Differenzen benötigt).

Auch bei Differentialgleichungen vierter Ordnung ist die bei Abbrechen nach dem Gliede $\nabla^2 f$ aus

$$y_{r+1} = 4y_r - 6y_{r-1} + 4y_{r+2} - y_{r-3} + h^4 \left(f_r - \nabla f_r + \frac{1}{6} \nabla^2 f_r - \frac{1}{720} \nabla^4 f_r + \dots \right) \quad (47)$$

entstehende Formel sehr einfach.

6. Interpolationsverfahren

Wieder seien für die Stellen x_e ($e = 1, \dots, r$) Näherungen $y_e^{(\nu)}$ für die exakten Werte $y^{(\nu)}(x_e)$ (für $\nu = 0, 1, \dots, n-1$) bekannt, und Näherungen $y_{r+1}^{(\nu)}$ sollen ermittelt werden. Nach (26) gilt für die exakte Lösungsfunktion, wenn man dort n durch $n-m$, x_0 durch x_{r+1} ersetzt und $y^{(n)} = f$ benutzt:

$$y^{(m)}(x_{r+1}) = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \frac{h^\nu}{\nu!} y_r^{(m+\nu)}(x_r) + h^{n-m} \sum_{e=0}^p \beta_{n-m,e}^* \nabla^e F(x_{r+1}) + R_{n-m,p+1}^* \quad (48),$$

wobei wieder die Abkürzungen (40) für F , (28) für $\beta_{n-m,e}^*$ benutzt sind und für das Restglied die Abschätzung (31) gilt. Bei Fortlassen des Restgliedes erhält man die Interpolationsformel für Näherungswerte $y_{r+1}^{(m)}$:

$$y_{r+1}^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \frac{h^\nu}{\nu!} y_r^{(m+\nu)} + h^{n-m} \sum_{e=0}^p \beta_{n-m,e}^* \nabla^e f_{r+1} \dots \dots \dots (49).$$

Für $n=1$, $m=0$ ist die Adamssche Interpolationsformel für Differentialgleichungen erster Ordnung als Spezialfall enthalten.

In (49) treten die Unbekannten $y_{r+1}^{(m)}$ auf beiden Seiten auf, man verwendet daher die Gleichung zur iterativen Berechnung, indem man die ν -te Näherung $y_{r+1}^{(m)[\nu]}$ auf der rechten Seite einsetzt und daraus die $(\nu+1)$ -te Näherung berechnet:

$$y_{r+1}^{(m)[\nu+1]} = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \frac{h^\nu}{\nu!} y_r^{(m+\nu)} + h^{n-m} \sum_{e=0}^p \beta_{n-m,e}^* \nabla^e f_{r+1}^{[\nu]} \dots \dots \dots (50).$$

Die Näherungsstufe ν ist dabei zur Unterscheidung von den Ableitungen durch eckige Klammern $[\nu]$ gekennzeichnet.

Gelegentlich verwendet man die Gl. (49) auch in der Form, bei der die Differenzen $\nabla^e f$ durch die Funktionswerte ausgedrückt sind. Die Gleichung lautet dann

$$y_{r+1}^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \frac{h^\nu}{\nu!} y_r^{(m+\nu)} + h^{n-m} \sum_{\sigma=0}^p \beta_{n-m,\sigma,p}^* f_{r+1-\sigma} \dots \dots \dots (51)$$

mit den neuen Koeffizienten

$$\beta_{n-m,\sigma,p}^* = (-1)^\sigma \sum_{e=\sigma}^p \beta_{n-m,e}^* \binom{e}{\sigma} \dots \dots \dots (52).$$

Wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung kann man auch hier noch andere Interpolationsformeln aufstellen. So gilt nach (33)

$$\left. \begin{aligned} y^{(m)}(x_{r+1}) &= -y^{(m)}(x_{r-1}) + 2 \sum_{e=0}^{\frac{n-m}{2}-1} \frac{h^{2e}}{(2e)!} y^{(m+2e)}(x_r) \\ &\quad + 2 h^{n-m} \sum_{e=0}^{\frac{p}{2}} \beta_{n-m,e}^{**} \nabla^{2e} F(x_{r+e}) + 2 R_{n-m,p}^{**} \text{ für gerades } n-m \\ y^{(m)}(x_{r+1}) &= y^{(m)}(x_{r-1}) + 2 \sum_{e=0}^{\frac{n-m-3}{2}} \frac{h^{2e+1}}{(2e+1)!} y^{(m+1+2e)}(x_r) \\ &\quad + 2 h^{n-m} \sum_{e=0}^{\frac{p}{2}} \beta_{n-m,e}^{**} \nabla^{2e} F(x_{r+e}) + 2 R_{n-m,p}^{**} \text{ für ungerades } n-m \end{aligned} \right\} \dots \dots (53).$$

Für die Restglieder gilt die Abschätzung (35); läßt man sie fort, so erhält man genau wie oben Gleichungen für die Näherungswerte $y_{r+1}^{(m)}$. Das so aufstellbare Interpolationsverfahren ist das

Verfahren der zentralen Differenzen:

$$y_{r+1}^{(m)} = \left\{ \begin{array}{l} -y_{r-1}^{(m)} + 2 \sum_{\varrho=0}^{\frac{n-m-2}{2}} \frac{h^{2\varrho}}{(2\varrho)!} y_r^{(m+2\varrho)} \\ y_{r-1}^{(m)} + 2 \sum_{\varrho=0}^{\frac{n-m-3}{2}} \frac{h^{2\varrho+1}}{(2\varrho+1)!} y_r^{(m+1+2\varrho)} \\ + 2 h^{n-m} \sum_{\varrho=0}^{\frac{p}{2}} \beta_{n-m,\varrho}^{**} \nabla^{2\varrho} f_{r+\varrho} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für gerades } n-m \\ \text{für ungerades } n-m \\ \end{array} \dots (54).$$

Gewöhnlich wird man die letzte Summe beim Gliede $p=2$, also $\varrho=1$, abbrechen, da für $\varrho=2$ bereits außer der Unbekannten y_{r+1} noch die Unbekannte y_{r+2} auftreten und damit die Durchführung des Interpolationsverfahrens umständlich gestalten würde⁷⁾.

Es seien noch einmal die Formeln (54) ausführlicher angeschrieben (die folgenden Gleichungen reichen aus für Differentialgleichungen bis zur vierten Ordnung einschließlich):

$$\left. \begin{array}{l} y_{r+1}^{(n-1)} = y_{r-1}^{(n-1)} + h \left(2f_r + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{r+1} \right) \\ y_{r+1}^{(n-2)} = 2y_r^{(n-2)} - y_{r-1}^{(n-2)} + h^2 \left(f_r + \frac{1}{12} \nabla^2 f_{r+1} \right) \\ y_{r+1}^{(n-3)} = y_{r-1}^{(n-3)} + 2h y_r^{(n-2)} + h^3 \left(\frac{1}{3} f_r + \frac{1}{60} \nabla^2 f_{r+1} \right) \\ y_{r+1}^{(n-4)} = 2y_r^{(n-4)} - y_{r-1}^{(n-4)} + h^2 y_r^{(n-2)} + h^4 \left(\frac{1}{12} f_r + \frac{1}{360} \nabla^2 f_{r+1} \right) \end{array} \right\} \dots (55).$$

7. Konvergenz der Iteration bei der fortlaufenden Rechnung

Zur Konvergenzuntersuchung werden die Interpolationsformeln in der auf die Funktionswerte umgeschriebenen Form entsprechend (51) verwendet. Schreibt man die Gleichung für v und $v-1$ an, so ergibt Subtraktion für den Unterschied die Beziehung

$$\left. \begin{array}{l} \delta^{(m)}[v] = y_{r+1}^{(m)}[v+1] - y_{r+1}^{(m)}[v] \\ \delta^{(m)}[v] = h^{n-m} \beta_{n-m,0,p}^* [f_{r+1}^{[v]} - f_{r+1}^{[v-1]}] \end{array} \right\} \dots (56).$$

Dabei sind die Zahlen $\beta_{q,0,p}^*$ nach (52) und nach (30)

$$\beta_{q,0,p}^* = \sum_{\varrho=0}^p \beta_{q,\varrho}^* = \beta_{q,p}.$$

Die rechte Seite wird mit Hilfe der Lipschitzbedingung (3) abgeschätzt

$$|\delta^{(m)}[v]| \leq h^{n-m} |\beta_{n-m,p}| \sum_{\varrho=0}^{n-1} k_{\varrho} |\delta^{(\varrho)}[v-1]| \quad (m=0, 1, \dots, n-1) \dots (57).$$

Multipliziert man diese n -Ungleichungen mit K_0, K_1, \dots, K_{n-1} , so erhält man bei Addition für die Größe

$$v^{[v]} = \sum_{\varrho=0}^{n-1} K_{\varrho} |\delta^{(\varrho)}[v]| \dots (58)$$

die Ungleichung

$$v^{[v]} \leq C v^{[v-1]} \dots (59)$$

mit

$$C = h^n |\beta_{m,p}| K_0 + h^{n-1} |\beta_{n-1,p}| K_1 + \dots + h |\beta_{1,p}| K_{n-1} \dots (60).$$

Nach bekannten Sätzen ist $C < 1$ hinreichend für die Konvergenz von $\sum_{v=0}^{\infty} v^{[v]}$ und, da wir die K_{ϱ} als positiv voraussetzen können, auch für die absolute Konvergenz von $\sum_{v=0}^{\infty} \delta^{(m)}[v]$ beim Iterationsverfahren.

Die hinreichende Konvergenzbedingung lautet somit

$$\begin{array}{l} \text{für } p=1: \frac{1}{2} h K_{n-1} + \frac{1}{6} h^2 K_{n-2} + \frac{1}{24} h^3 K_{n-3} + \dots + h^n |\beta_{n,1}| K_0 < 1, \\ \text{für } p=2: \frac{5}{12} h K_{n-1} + \frac{1}{8} h^2 K_{n-2} + \frac{7}{240} h^3 K_{n-3} + \dots + h^n |\beta_{n,2}| K_0 < 1. \end{array}$$

⁷⁾ E. Lindelöf u. a. O. gibt bei Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung Arten der Mitberücksichtigung des Gliedes $\nabla^4 f_{r+2}$ an.

Numerische Integration einer Differentialgleichung der Wellenmechanik

Von Th. Schade in Aachen

Die vorliegende Arbeit behandelt die numerische Auswertung einer speziellen Schrödingergleichung des Mehrkörperproblems der Atomphysik unter Zugrundelegung gewisser analytischer Aussagen vor allem im asymptotischen Verhalten der Lösung der Differentialgleichung. Damit kann das bisherige Auswertungsverfahren erheblich gekürzt werden.

Im I. und II. Teil wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung als Eigenwertproblem behandelt, wobei auch an Hand von Störungsrechnungen quantitative Aussagen über Eigenwertänderungen bei Änderung des Potentials und anderer Funktionen der Differentialgleichung gemacht werden, die für die Iterationsrechnung wesentlich sind.

Der III. Teil zeigt dann an einem Beispiel die numerischen Auswertung und die Genauigkeit des Verfahrens.

The present paper deals with the numerical treatment of a special Schrödinger equation concerning the problem of a number of particles in atomic physics that is based on certain analytical statements primarily on the asymptotic behaviour of the solution of the differential equation. Thus the method of the treatment hitherto used is shortened.

In part I and II, the differential equation of the second order is treated as eigenvalue problem. Quantitative statements of the alteration of the eigenvalues with the variation of the potential and other functions of the differential equation are given that are important to the process of iteration.

Part III illustrates the numerical treatment and the accuracy of the method by an example.

В этой работе излагается метод численного решения одного специального уравнения Шредингера, относящегося к проблеме системы свободных частиц атомной физики. Это решение исходит из некоторых аналитических утверждений, касающихся в первую очередь асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений. Этим путем значительно упрощается прежний метод решения.

В I и II части рассматривается проблема собственных решений дифференциальных уравнений второго порядка. Количественный анализ изменения собственных значений при изменении потенциала и других функций дифференциального уравнения в значительной мере упрощает процесс итерации.

В III части иллюстрируются на примере ход численного решения и точность метода.

Vorbemerkung

Die in der Arbeit durchgeführte Behandlung der Differentialgleichung 2. Ordnung ist auf Grund des vorgelegten physikalischen Problems entstanden. Es ist aber hier weitgehendst in den Hintergrund getreten und der mathematischen Durchführung das Hauptaugenmerk geschenkt. Die abgeleiteten Formeln sind möglichst allgemein gehalten, um gegebenenfalls ähnliche mathematische Probleme in analoger Weise der numerischen Auswertung zugänglich zu machen. Die numerischen Rechnungen im Teil III der Arbeit sind mit üblichen elektrischen Rechenmaschinen im Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen durchgeführt worden, wo infolge der erfolgreichen Versuchsrechnungen auch weitere laufende Rechnungen des gleichen physikalischen Problems mit der hier beschriebenen neuen Methode bearbeitet werden.

I. Einleitung

Das quantenmechanische Mehrkörperproblem der Elektronen einer Atomhülle wird mathematisch durch die bekannte Schrödingergleichung für die sog. Wellenfunktion formuliert. Unter der Voraussetzung eines kugelsymmetrischen Feldes läßt sich eine Trennung der Variablen in räumlichen Polarkoordinaten durchführen, wobei dann noch das einzige Problem in der Bestimmung des nur vom Abstand r vom Mittelpunkt abhängigen Teilfaktors der Wellenfunktion besteht (vgl. Hartree: Proc. Cambr. Phil. Soc. 24, S. 89). Die Schrödingersche Wellengleichung reduziert sich hierdurch auf

$$P''(r) + \left[2v - \varepsilon - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] P(r) + F(r) = 0$$

mit $V = -v$ als Potential des Bohrschen Atommodells und $E = -\frac{\varepsilon}{2}$ als Gesamtenergie. l wird als Nebenquantenzahl bezeichnet. P ist der noch mit r multiplizierte Radialfaktor. Im Falle des Wasserstoffatoms mit einer s -Schale ($l=0$) erhält man eine einzige Differentialgleichung, die exakt mit Besselschen Funktionen gelöst werden kann. Bei schwereren Atomen erhält man für jede Schale n, l (Haupt- und Nebenquantenzahl) je eine Differentialgleichung, die aber durch das Potential miteinander gekoppelt sind und die somit ein System von Differentialgleichungen darstellen. Über die Aufstellung der Differentialgleichungssysteme in angeregten und nicht angeregten Zuständen der Elektronen soll im Rahmen dieser Arbeit nicht gesprochen werden (vgl. dazu die entsprechenden Arbeiten von Hartree, Fock u. a., Z. Physik 61 [1930] 126).

Es sei hier nur noch erwähnt, daß die Bestimmung der Wellenfunktionen für die Berechnung von gewissen Größen der Atomphysik wie Gesamtenergie des Systems oder Oszillatorenstärken notwendig sind, soweit sie nicht mehr der Beobachtung entnommen werden können.

Die vorgelegte Differentialgleichung für die Wellenfunktion P zur Berechnung von Ein- und Mehrelektronenspektren der Atomphysik lautet im Prinzip

$$P_N''(nl/r) + \left[T(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} - \varepsilon \right] P_N(nl/r) + F(r) = 0 \quad (1,1),$$

wobei bei Mehrelektronenspektren ein entsprechendes System von Differentialgleichungen von diesem Typus zu befriedigen ist.

$T(r)$ und $F(r)$ selbst enthalten bei Mehrelektronenspektren die Wellenfunktion $P_N(nl/r)$, als Lösungen des Differentialgleichungssystems in Form von Integralausdrücken dieser Funktion, so daß die richtige Wellenfunktion iteriert werden muß. Die Haupt- und Nebenquantenzahlen n und l gelten als Parameter der Wellenfunktionen. Sie bestimmen sich aus dem Zustand des betrachteten Elements. $P(nl/r)$ soll im weiteren Verlauf der Rechnung durch P ersetzt werden. P_N soll normiert sein, d. h.

$$\int_0^\infty P_N^2 dr = 1 \quad (1,2).$$

Für die homogene Differentialgleichung (1,1) ist diese Bedingung unproblematisch, da jedes Vielfache einer beliebigen Lösung auch eine Lösung der Differentialgleichung ist.

ε ist der Eigenwert der Differentialgleichung, dessen Bestimmung das eigentliche Hauptproblem bedeutet. Für P_N gelten die Randbedingungen

$$P_N = 0 \begin{cases} \text{für } r = 0 \\ \text{für } r = \infty \end{cases}$$

Die erste Bedingung für $r=0$ läßt sich dadurch erfüllen, daß für P_N in der Umgebung des Nullpunktes eine Potenzreihe angesetzt wird, die mit $a_0 r^{l+1}$ beginnt. Da $T(r)$ und $F(r)$ mit $r \rightarrow \infty$ nach Null gehen, würde die dann übrig bleibende Differentialgleichung die Lösungen $e^{-\sqrt{\varepsilon}r}$ und $e^{+\sqrt{\varepsilon}r}$ zulassen, wovon die erste die gesuchte wäre.

Zur Integration der Differentialgleichung kann man also mit $r=0$, Innenintegration genannt, und $r \rightarrow \infty$, Außenintegration genannt, beginnen und beide numerischen Lösungen unter richtiger Wahl des Eigenwertes und unter Beachtung der Regularität an der Flickstelle zusammensetzen, was einen erheblichen Rechenaufwand erfordert. Diese gebräuchliche Methode soll nicht im einzelnen beschrieben werden.

Zur Ermittlung des P_N bedient man sich eines Iterationsverfahrens. Aus einem geschätzten P , das in $T(r)$ und $F(r)$ eingeht und einem geschätzten ε berechnet man die Wellenfunktion P aus der Differentialgleichung unter Beachtung von Regularität (Eigenwertvariation) und Normierung (a_0 -Variation), die zunächst nicht mit der in T und F eingesetzten übereinstimmen werden. Durch Mittlung dieser Funktionen und Änderung von ε lassen sich neue Näherungsfunktionen bestimmen und damit auch iterativ die richtige Lösung und das dazugehörige ε finden. Die Regularitätsforderung in jedem der Iterationsschritte wird unter Variation von ε dadurch erreicht, daß die logarithmischen Ableitungen an der Flickstelle für Außen- und Innenintegration in Übereinstimmung gebracht werden. Da die Flickstelle in den Bereich des Wendepunktes gelegt wird, kann man statt der Ableitungen den Differenzenquotienten setzen und erhält:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\text{innen}} = \frac{l}{h} \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\text{außen}}$$

$r=r_{\text{wo}} \qquad r=r_{\text{wo}}$

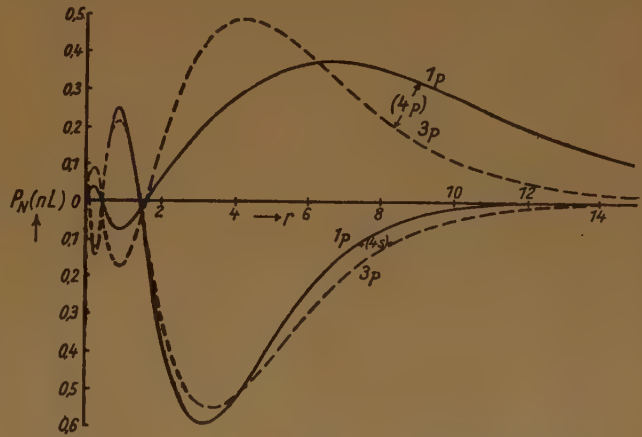


Bild 1

wobei r_w das Argument eines Funktionswertes in der Umgebung des letzten Wendepunktes bedeutet (die genaue Abszisse wird mit $r=r_0$ bezeichnet) und h die Intervalllänge von r . Der letzte Wendepunkt ist in der Differentialgleichung durch

$$T(r_w) - \frac{l(l+1)}{r_w^2} - \varepsilon = 0$$

gekennzeichnet, wenn man die dort schon kleine Größe von F nicht berücksichtigt. Alle weiteren Wendepunkte für $r < r_w$ sind durch $P=0$ ausgezeichnet.

Eine Innenintegration über $r=r_w$ hinaus würde in die e^{Y_0} -Lösung der asymptotischen Differentialgleichung führen, da der geschätzte oder jeweils iterierte Wert von ε nicht genau dem richtigen Eigenwert entspricht und die Lösung für große r damit sehr instabil wird. Die vorliegende Arbeit soll nun einen Weg zeigen, die Funktion für die Außenintegration von der Umgebung des Wendepunktes $r=r_w$ an zu bestimmen, so daß zumindestens die Ordinaten-übereinstimmung der Wellenfunktion mit der Innenintegration erreicht werden kann, da man über die Größenordnung der Anfangswerte für eine Außenintegration nur sehr wenig aussagen kann, wenn man nicht zu sehr großen Argumentwerten übergeht und damit mit sehr kleinen Funktionswerten rechnen muß. Der Zusammensetzungsprozeß wird dadurch sehr mühsam. Im numerischen Teil der Arbeit wird außerdem noch gezeigt, daß es durchaus möglich ist, daß die Wellenfunktion mit großen Argumentwerten ihr Vorzeichen noch ändern kann. Das bedeutet eine weitere Schwierigkeit in der Schätzung solcher Anfangswerte zur numerischen Integration.

Es soll unter Benutzung von asymptotischen Darstellungen für F und T , die vom letzten Wendepunkt an gelten, die numerische Außenintegration durch eine exakte Lösung der asymptotischen Differentialgleichung ersetzt werden und aus ihr eine zumindestens für Näherungslösungen brauchbare Funktion ermittelt werden. Wie man später sehen wird, können für F auch die numerischen Werte benutzt werden, was auch zu genaueren Ergebnissen führt; der Vollständigkeit halber sollen aber beide Möglichkeiten diskutiert werden.

Im numerischen Teil wird im einzelnen die Praxis der numerischen Auswertung erläutert und an Beispielen die Genauigkeit der entwickelten Methode gezeigt.

Zum Abschluß sei hier noch als Beispiel das Differentialgleichungssystem des Ca^{++} angegeben und das Resultat in der folgenden Abbildung skizziert. (Die Anzahl der Nullstellen der Wellenfunktion ist $n-1$.) (D. R. Hartree und W. Hartree, Proc. of Royal Soc. Vol. 164 (1938) 167.)

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{T(Ca^{++}) - 2 Y_0(4p, 4p/r)}{r} - \varepsilon_{4s, 4s} \right] P(4s/r) + \sum_{n=1}^3 \frac{2 Y_0(n s, 4 s/r)}{r} P(n s, r) +$$

$$+ \sum_{n=2}^3 \frac{2 Y_1(n p, 4 s/r)}{r} P(n p/r) \pm \frac{2}{3} \frac{Y_1(4 s, 4 s/r)}{r} P(4 p/r) = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{T(Ca^{++}) - 2 Y_0(4 s, 4 s/r)}{r} - \varepsilon_{4p, 4p} - \frac{2}{r^2} \right] P(4p/r) + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^3 \frac{Y_1(n s, 4 p/r)}{r} P(n s/r) +$$

$$+ \sum_{n=2}^3 \left[\frac{2 Y_0(n p, 4 p/r)}{r} + \frac{4}{3} \frac{Y_2(n p, 4 p/r)}{r} \right] P(n p/r) \pm \frac{2}{3} \frac{Y_1(4 s, 4 p/r)}{r} P(4 s/r) = 0,$$

$$T(Ca^{++}) = 2N - \sum_{n'l'} 4(2l' + 1) Y_0(n'l', n'l'/r) \quad \begin{matrix} n'l' \neq 4s, 4p, \\ N=20 \text{ (Ordnungszahl)} \end{matrix}$$

$$Y_K(\alpha, \beta/r) = (2K + 1) r^{K+1} \int_r^\infty \frac{Z_K}{r_1^{K+2}} dr_1,$$

$$Y_K(\alpha, \beta/r) = \int_0^r P_N(\alpha/r_1) P_N(\beta/r_1) \left(\frac{r_1}{r} \right)^K dr_1.$$

Es sei noch bemerkt, daß das positive Vorzeichen im jeweils letzten Term der Differentialgleichung den sog. Triplettzustand und das negative Vorzeichen den Singulettzustand bezeichnet.

Die Wellenfunktionen des Rumpfes $P(1s/r)$, $P(2s/r)$, $P(3s/r)$, $P(2p/r)$, $P(3p/r)$ sind numerisch vorgegeben.

Bild 1 zeigt den Verlauf der Wellenfunktionen $P(4s/r)$ und $P(4p/r)$, wobei der Singulettzustand durch die ausgezogene und der Triplettzustand durch die gebrochene Linie dargestellt wird.

Die Eigenwerte sind:

$$\text{Triplett: } \varepsilon_{4s, 4s} = 0,518$$

$$\text{Singulett: } \varepsilon_{4s, 4s} = 0,505$$

$$\varepsilon_{4p, 4p} = 0,306$$

$$\varepsilon_{4p, 4p} = 0,172.$$

II. Analytischer Teil

2. Lösungsmethode

Die Differentialgleichung lautet:

$$P'' + \left(T(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} - \varepsilon \right) P + F(r) = P'' + T_1(r) P + F(r) = 0 \quad (2,1).$$

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wird die Innenintegration mit $r=0$ unter Vorgabe einer beliebigen $(l+1)$ -ten Ableitung der Funktion P begonnen und bis zum Wendepunkt $r=r_w$ durchgeführt.

Für die anschließende Lösung wird eine approximative Darstellung für T benutzt in der Form:

$$T(r) = \frac{a}{r} + b \quad (2,2).$$

Die Konstanten a und b bestimmt man aus (2,2) durch Einsetzen der Funktionswerte für $r=r_w$ und etwa $r=3r_w$. Es soll später im numerischen Teil noch gezeigt werden, welches der geeignetste Wert für b ist.

Setzt man weiterhin $\varepsilon - b = \varepsilon_1$, so lautet der asymptotische Wert für T_1

$$T_1(r)_{r \geq r_w} = \frac{a}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \varepsilon_1 \quad (2,3).$$

Der Ansatz für die homogene Lösung der Differentialgleichung (2,1) lautet dann

$$P_h = e^{-\sqrt{\varepsilon_1} r} (r^K + a_1 r^{K-1} + \dots + a_n r^{K-n} + \dots) \quad (2,4).$$

Der Koeffizientenvergleich liefert nach Einsetzen in (2,1)

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{a}{2\sqrt{\varepsilon_1}} \\ a_1 &= -\frac{K(K-1) + l(l+1)}{2\sqrt{\varepsilon_1}} = -\frac{(K+l)(K-l-1)}{2\sqrt{\varepsilon_1}} \\ a_2 &= \frac{l}{(2\sqrt{\varepsilon_1})^2 \cdot 2!} [(K+l)(K-l-1)] \cdot [(K+l-1)(K-l-2)] \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{l}{(2\sqrt{\varepsilon_1})^n \cdot n!} [(K+l)(K-l-1)] [(K+l-1)(K-l-2)] \cdots [(K-n+l+1)(K-n-l)] \end{aligned} \right\} (2,5).$$

Für die a_n läßt sich weiterhin eine Rekursionsformel ableiten

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2\sqrt{\varepsilon_1} \cdot n} (K-n+l+1)(K-n-l) \quad (2,6).$$

Damit lautet die homogene Lösung

$$P_h = k \cdot e^{-\sqrt{\varepsilon_1} r} r^K \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \quad (2,7).$$

Diese Reihe ist semikonvergent. Zur Darstellung einer numerisch brauchbaren Lösung kann man aber den Teil der Reihe benutzen, für den die a_n mit wachsendem n kleiner werden und den Fehler berechnen, der entsteht, wenn man die Reihe bei $n=N$ abbricht. Man wird die Reihe bei dem Glied abbrechen, bei welchem $|a_n|$ ein Minimum ist, d. h.

$$\text{Min } |a_n| = a_N \quad (2,8).$$

Damit würde die Differentialgleichung lauten

$$P'' + T_1(r) P = K(r)$$

mit

$$K(r) = a_N e^{-\sqrt{\varepsilon_1} r} r^{K-N-2} (K-N+l)(K-N-l-1) \quad (2,9).$$

Zur Berechnung des Fehlers $K(r)$ der rechten Seite der ursprünglichen Differentialgleichung genügt es den maximalen Fehler für $r=r_w$ festzustellen, da die Funktion $K(r)$ mit wachsendem r sehr rasch abnimmt.

Ist $K(r)$ von der gleichen Größenordnung wie die numerische Berechnung der Funktion $F(r)$, so kann man ohne weiteres $K(r)$ gleich Null setzen. Dieses wird zumeist der Fall sein. Anderenfalls kann man sich in einer im Abschn. 5 durchgeführten Störungsrechnung die Änderung des

Eigenwertes ε berechnen und damit die Änderung der Wellenfunktion. Man wird aber wohl in den meisten Fällen schon an der Änderung des Eigenwertes sehen können, ob der Einfluß auf die Wellenfunktion im Rahmen der gewünschten Genauigkeit von Einfluß ist oder nicht.

In der Annäherung der T -Funktion durch eine Funktion $a/r + b$ steckt zunächst eine gewisse Willkür. Man könnte hier einwenden, daß man vielleicht auch sicher und vielleicht noch besser in dem betrachteten r -Bereich T durch eine andere Funktion const/r^n annähern könnte. Dies ist auch ohne weiteres möglich. Es ergibt sich dabei aber, daß die Koeffizienten der Reihe für $1/r$ schlecht oder gar nicht abnehmen, so daß die Abspaltung eines entsprechenden Teiles der semikonvergenten Reihe mit (2,7) als Näherungspolynom für die Lösung der Differentialgleichung nicht mehr derart möglich ist, daß $K(r)$ mit den Fehlern innerhalb der Rechengenauigkeit der numerischen Rechnung vergleichbar wird.

Damit folgt für die asymptotische Lösung der homogenen Differentialgleichung P_h

$$P_h = C_1 e^{-\sqrt{\varepsilon_1} r} r^K \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \dots \dots \dots (2,10),$$

wobei C_1 so gewählt werden kann, daß für $r=r_w$ der Ordinatenanschluß an die Integration von innen gewährleistet ist. Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung P_{ih} läßt sich dann bekannterweise in der Form darstellen

$$P_{ih} = C_2 P_h - \bar{C}_2 P_h \int \frac{dr}{P_h^2} - P_h \int \frac{dr}{P_h^2} \int P_h F dr \dots \dots \dots (2,11).$$

Die Integrationskonstanten bestimmen sich aus den Randbedingungen. Da die Innenintegration nach dem üblichen Schema am besten numerisch von $r=0$ durchgeführt werden kann, interessiert auch hier nur die Bestimmung der Funktion für $r \geq r_w$.

Da P_h für $r \rightarrow \infty$ mit $e^{-\sqrt{\varepsilon} r}$ und auch P_{ih} für $r \rightarrow \infty$ nach Null gehen soll, bestimmt sich \bar{C}_2 zu Null. Wird die weitere Integration von $r=r_w$ an durchgeführt, so lautet die Lösung für P_{ih}

$$P_{ih} = C_2 P_h - P_h \int_{r_w}^r \frac{dr}{P_h^2} \int_{r_w}^r P_h F dr \dots \dots \dots (2,12),$$

wobei für die Integrationskonstante C_2 gilt

$$C_2 = \frac{P_{ih}(r_w)}{P_h(r_w)} \dots \dots \dots (2,13).$$

Schreibt man noch für $-\int_{r_w}^{\infty} F P_h dr = C_3$, so lautet (2,12)

$$P_{ih} = C_2 P_h - P_h \int_{r_w}^r \frac{C_3 + \int_{r_w}^r F P_h dr}{P_h^2} dr \dots \dots \dots (2,14).$$

Es ist hierbei zunächst nicht notwendig, die Innenintegration für die homogene Gleichung durchzuführen, da ein Faktor für den Ordinatenanschluß sich aus dem Integralausdruck herauskürzt und die Integrationskonstante C_2 den Ordinatenanschluß an die inhomogene Lösung von innen gewährleistet. Aussagen über Regularität und Normierung sind damit noch nicht gemacht.

3. Näherungsweise Erfüllung der Regularität

Ist für die Innenlösung P die Änderung von P bei einer Änderung von ε um $\Delta\varepsilon$, so heißt das für die Differentialgleichung

$$P'' + \Delta_\varepsilon P'' + (T_2 - \varepsilon - \Delta\varepsilon)(P + \Delta_\varepsilon P) + F = 0 \dots \dots \dots (3,1)$$

der mit $P'' + (T_2 - \varepsilon)P + F = 0$

$$\Delta_\varepsilon P'' + (T_2 - \varepsilon) \Delta_\varepsilon P - \Delta\varepsilon \cdot P - \Delta\varepsilon \cdot \Delta_\varepsilon P = 0.$$

Wird $\Delta\varepsilon \cdot \Delta_\varepsilon P$ als eine kleine Größe zweiter Ordnung vernachlässigt, so lautet die Differentialgleichung für $\Delta_\varepsilon P$

$$\Delta_\varepsilon P'' + (T_2 - \varepsilon) \Delta_\varepsilon P - \Delta\varepsilon \cdot P = 0 \dots \dots \dots (3,2).$$

Die ersten beiden Summanden von (3,2) entsprechen der homogenen Differentialgleichung ($\Delta_\varepsilon P = \text{const } P$), so daß man erhält

$$\Delta_\varepsilon P_{ih} = \text{const} \cdot P_h + \Delta_\varepsilon P \int_0^r \frac{dr}{P_h^2} \int_0^r P_h P_{ih} dr.$$

Integriert man nur über den gemeinsamen Gültigkeitsbereich der Außen- und Innenlösung ($W: r_1 \leq r \leq r_w$), so folgt

$$\Delta_\varepsilon P(r_w) = \Delta_\varepsilon P(r_1) + \Delta_\varepsilon P_h \int_{r_1}^{r_w} \frac{dr}{P_h^2} \int_0^{r_w} P_{ih} P_h dr$$

oder mit $c_0 = \int_0^{r_w} P_{ih} P_h dr$

$$\Delta_\varepsilon P(r_w) - \Delta_\varepsilon P(r_1) = \Delta_\varepsilon \cdot c_0 \cdot P_h \int_{r_1}^{r_w} \frac{dr}{P_h^2} \dots \dots \dots (3,3).$$

Damit ergibt sich für die Ordinatendifferenz der Innenlösung im gemeinsamen Gültigkeitsbereich W

$$\Delta P_{w(\text{Innen})} = P(r_w) + \Delta_\varepsilon P(r_w) - P(r_1) - \Delta_\varepsilon P(r_1) = P(r_w) - P(r_1) + \Delta_\varepsilon \cdot c_0 \cdot P_h(r_w) \int_{r_1}^{r_w} \frac{dr}{P_h^2}.$$

Die Regularitätsforderung lautet damit

$$\Delta P_{w(\text{außen})} = \Delta P_{w(\text{Innen})} = P(r_w) - P(r_1) + \Delta_\varepsilon \cdot c_0 \cdot P_h(r_w) \int_{r_1}^{r_w} \frac{dr}{P_h^2} \dots \dots (3,4).$$

Rechnet man sich für die ersten beiden Punkte des Polynoms zwei ΔP mit verschiedenem ε aus, so kann man durch lineare Interpolation die Größenordnung der Änderung von ε bestimmen, ohne die Innenintegration selbst durchzuführen. Eine numerische Nachprüfung dieses Verfahrens folgt im numerischen Teil der Arbeit.

4. Näherungsweise Bestimmung der Normierungsbedingung

P_{ih} ist der Normierungsbedingung unterworfen, die eine Variation des a_0 zur Folge hat. Für eine Iterationsrechnung ist es nicht nötig, diesen Wert sehr genau zu bestimmen. Eine gute Schätzung für die Bestimmung der Anfangswerte bei $r=0$ ergibt aber folgende Überlegung.

Setzt man in (2,12) für das Doppelintegral $D(r)$, so erhält man durch Quadrieren und Integrieren von 0 bis ∞ unter der Voraussetzung, daß P_{ih} normiert sein soll

$$1 = \int_0^\infty P_h^2 (D(r) - C_2)^2 dr.$$

Das heißt

$$C_2^2 - \frac{2 C_2}{\int_0^\infty P_h^2 dr} \int_0^\infty P_h^2 D(r) dr + \frac{1}{\int_0^\infty P_h^2 dr} \int_0^\infty P_h^2 D^2(r) dr - 1 = 0.$$

Bedenkt man, daß die $D(r)$ enthaltenden Integrale sehr klein sind, da $D(r)$ im wesentlichen die Korrektur der homogenen Lösung durch einen inhomogenen Term bedeutet, so ist, wenn die homogene Lösung P_h normiert ist, C_2 ungefähr eins. Das bedeutet aber, daß die Anfangswerte für $r=0$ der normierten homogenen Lösung auch für die inhomogene Lösung einen Normierungsfaktor ≈ 1 ergeben.

5. Störungsrechnung

Es ist oft erwünscht zu wissen, wie groß etwa die Eigenwertänderung sein wird, wenn das Potential T oder die Austauschglieder F um einen von r abhängigen Betrag geändert werden. Da die Wellenfunktion selbst keine singulären Stellen besitzt, ist diese Rechnung ohne weiteres durchzuführen. Ändert man T um ΔT , F um ΔF , so ändert ε um $\Delta \varepsilon$ und P um ΔP . Man erhält durch Einsetzen in die Differentialgleichung unter Berücksichtigung derselben und Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung.

$$\Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih}'' + (T_2 - \varepsilon) \Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih} + (\Delta T - \Delta \varepsilon) P_{ih} + \Delta F = 0 \dots \dots (51).$$

Ist ε_1 der Eigenwert der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$P_h'' + (T_2 - \varepsilon_1) P_h = 0 \quad (5,2),$$

so kann man auch für (5,1) schreiben

$$\Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih}'' + (T_2 - \varepsilon_1) P_{ih} + (\varepsilon_1 - \varepsilon) \Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih} + (\Delta T - \Delta \varepsilon) P_{ih} + \Delta F = 0$$

oder wenn man $T_2 - \varepsilon_1$ aus (5,2) einführt

$$(\Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih}' P_h - P_h' \Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih})' + (\varepsilon_1 - \varepsilon) \Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih} P_h + (\Delta T - \Delta \varepsilon) P_{ih} P_h + \Delta F P_h = 0 \quad (5,3).$$

Integriert man (5,3) von 0 bis ∞ , so folgt die Beziehung

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{\int_0^\infty P_{ih} P_h dr} \left[\int_0^\infty \Delta T P_{ih} P_h dr + \int_0^\infty \Delta F P_h dr + (\varepsilon_1 - \varepsilon) \int_0^\infty \Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih} P_h dr \right].$$

Da $\varepsilon_1 - \varepsilon$ und $\Delta_{\varepsilon, F, T} P_{ih}$ im allgemeinen kleine Größen erster Ordnung sind, kann man den letzten Summanden vernachlässigen und erhält das endgültige Resultat

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{\int_0^\infty P_{ih} P_h dr} \left[\int_0^\infty \Delta T P_{ih} P_h dr + \int_0^\infty \Delta F P_h dr \right] \quad (5,4).$$

Diese Rechnung setzt voraus, daß man die homogene Lösung der Differentialgleichung mit ihrem Eigenwert kennt, die auch verhältnismäßig einfach zu bestimmen sind. Man kann jedoch ohne diese Voraussetzung mit der gleichen Methode, die zur Abschätzung des Eigenwertes zur Erfüllung der Regularitätsbedingung (Abschn. 3) diente, eine einfache Beziehung erhalten, in der nur die Teillösungen der homogenen Differentialgleichung des gleichen Eigenwertes wie der inhomogenen benötigt werden. Die Rechnung ergibt, wenn man $\Delta F = 0$ setzt

$$\Delta P_{w(\text{außen})} = \Delta P_{w(\text{innen})} - P_h(r_w) [\Delta \varepsilon C_\varepsilon - C_\alpha] \int_{r_1}^{r_w} \frac{1}{P_h^2} dr \quad (5,5)$$

mit

$$C_\varepsilon = \int_0^{r_w} P_{ih} P_h dr \quad C_\alpha = \int_0^{r_w} \Delta T P_{ih} P_h dr.$$

Die Funktionswerte der Außenintegration verschafft man sich aus dem Näherungspolynom und erhält somit eine eindeutige Beziehung zwischen ΔT und $\Delta \varepsilon$, um durch lineare Interpolation den richtigen Wert $\Delta \varepsilon$ zu gewinnen.

In dem vorliegenden speziellen Fall der Differentialgleichung der Wellenmechanik wurde nach der Änderung des Eigenwertes gefragt, wenn man im Potential $T(r)$ ein durch L. Biermann gegebenes additives Polarisationsglied der Form

$$\Delta T = \frac{\alpha}{r^4} \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{r}{r_0} \right)^5 \right) \right] = \alpha \cdot f(r) \quad (5,6)$$

berücksichtigt, wobei α der sog. Polarisationsfaktor ist. Bevor hierfür gleich ein entsprechendes Beispiel zitiert werden soll, sei noch vermerkt, daß für homogene Differentialgleichungen ($F=0$) und $\Delta F=0$ (5,4) für normierte Lösungen die einfache bekannte Form hat

$$\Delta \varepsilon = \int_0^\infty \Delta T P_{N,h}^2 dr \quad (5,7).$$

Weiter unten wird außerdem gezeigt, daß eine analog gebaute Abschätzungsformel für inhomogene Differentialgleichungen

$$\Delta \varepsilon = \int_0^\infty \Delta T P_{N,h}^2 dr \quad (5,8)$$

zu sehr ungenauen Ergebnissen führen kann, was die ganze Abschätzung bei der oft großen Empfindlichkeit des Eigenwertes illusorisch macht.

Das hier gewählte Beispiel ist der Rechnung, die dem späteren numerischen Teil der Arbeit zugrunde liegt, entnommen. (Die Rechnung ist an der dort angegebenen Differentialgleichung II für Mg^{++} durchgeführt worden.)

1. Nach (5,8) ergibt sich mit $\Delta F=0$

$$\Delta \varepsilon = \alpha \int_0^\infty f P_{N,h}^2 dr$$

$$\Delta \varepsilon = -0,001346 \alpha.$$

2. Für (5,4) ist P_h mit dem gleichen Eigenwert wie P_{ih} berechnet, wobei die Regularitätsbedingung an der Flickstelle unberücksichtigt blieb und lediglich Ordinatenübereinstimmung erzwungen wurde. Man erhält damit auch ziemlich genau den Wert von (5,4). Damit ist

$$\Delta \varepsilon = \alpha \cdot \frac{\int_0^\infty P_{ih} P_h dr}{\int_0^\infty P_{ih} P_h dr}$$

$$\Delta \varepsilon = -0,000675 \alpha.$$

3. Aus (5,5) folgt durch Interpolation

$$\Delta \varepsilon = -0,000576 \alpha.$$

Damit bestätigt sich, daß (5,8) nur für ganz grobe Schätzungen brauchbar ist. Die genauesten Ergebnisse liefert die letzte Formel, die etwas mehr Rechenaufwand erfordert. Allerdings lohnt sich dieser Rechenaufwand vor allem dann, wenn man schon aus der ersten Schätzung der ersten Näherung auf den richtigen Eigenwert schließen will, ohne die Wellenfunktion im ganzen Bereich genau zu kennen. Es ist noch zu bemerken, daß diese Rechnung natürlich auch benutzt werden kann, um die umgekehrte Aufgabe zu lösen. In dem vorliegenden physikalischen Problem könnte man daran denken, die Größe α so zu bestimmen, daß man die beobachtete Energie, die im wesentlichen vom Eigenwert abhängt, erhält, um damit auch den Einfluß der Polarisierung richtig zu erfassen.

Als eine weitere Anwendung der Störungsrechnung kann man die Erfüllung der Normierungsbedingung betrachten.

Man schreibt die Differentialgleichung in der Form

$$P_k'' + (T_2 - \varepsilon) P_k + k \cdot F = 0 \quad (5,9)$$

mit k als einen so zu bestimmenden Faktor, daß die Normierungsbedingung

$$k = \lambda = \left[\int_0^\infty P_\lambda^2 dr \right]^{1/2}$$

erfüllt ist.

Man hat zunächst eine Lösung für $k=1$ bestimmt, wobei sich das Normierungsintegral

$$k^{(1)} = \left[\int_0^\infty P_1^2 dr \right]^{1/2}$$

im allgemeinen nicht zu Eins ergibt. Anderenfalls ist die integrierte Wellenfunktion normiert. Setzt man in (5,9) wahlweise einen zweiten Wert $k=k_2$ ein, errechnet sich mit (5,4) die entsprechende Eigenwertänderung, indem man $\Delta T=0$ und $\Delta F=(k_2-k_1)F$ setzt, so ergibt die Integration von (5,7) das Normierungsintegral $k^{(2)}$. Durch lineare Interpolation läßt sich nunmehr der richtige Wert $k=\lambda$ bestimmen und mit (5,4) der zugehörige Eigenwert. Die gesuchte normierte Wellenfunktion ist dann

$$P_N = \frac{1}{\lambda} P_\lambda \quad (5,10).$$

6. Näherungsweise Bestimmung des Eigenwertes ε

Um bei dem in der Einleitung beschriebenen Iterationsverfahren möglichst schnell zum Ziel zu kommen, benötigt man eine möglichst genaue Eigenwertschätzung.

Integriert man die inhomogene Differentialgleichung von Null bis ∞ , so erhält man mit $P(\infty)=0$ nach ε aufgelöst

$$\varepsilon = \frac{-P'(0) + \int_0^\infty \left[\left(T - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) P + F \right] dr}{\int_0^\infty P dr} \quad (6,1)$$

Ist $l > 0$ so ist auch $P'(0)=0$ und aus (6,1) wird

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \left[\left(T - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) P + F \right] dr}{\int_0^\infty P dr}; \quad l > 0 \quad (6,2),$$

wobei es durchaus genügt, die Integrale nach Simpson zu bestimmen.

Für $l=0$ beginnt $P(r)$ mit einem in r linearen Glied, womit $P'(0)$ gegeben ist. Die Integration ist aber deshalb ungenau, weil T im allgemeinen mit const/r beginnt und damit für kleine r erhebliche Ungenauigkeiten im Produkt $T \cdot P$ die Berechnung von ε gerade im wesentlichen Teil des Zählerintegrals verfälschen. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, multipliziert man die Differentialgleichung mit r und integriert dann von Null bis ∞ . Es ergibt sich somit für $l=0$

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} r \left[\left(T - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) P + F \right] dr}{\int_0^{\infty} r P dr}; \quad l=0 \dots \dots \dots (6,3).$$

7. Asymptotische Lösung der inhomogenen Differentialgleichung unter Benutzung einer approximativen Darstellung für F

Es hat sich gezeigt, daß im vorliegenden Fall der Differentialgleichung der Wellenmechanik $F(r)$ in der Form dargestellt werden kann

$$F = C_3 \cdot e^{-\sqrt{\varepsilon_1} r} r^{N-K}; \quad r \geq r_w$$

mit

$$C_3 = F(r_w) e^{+\sqrt{\varepsilon_1} r_w} r_w^{K-N} \dots \dots \dots (7,1).$$

Die asymptotische Lösung der homogenen Differentialgleichung schrieb sich in der Form

$$P_h = C_1 \cdot e^{-\sqrt{\varepsilon_1} r} r^K \left\{ P_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_N$$

mit

$$\left\{ P \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_N = 1 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot \frac{1}{r^n}.$$

Führt man diesen Ausdruck in die inhomogene Lösung (2,12) ein, so lautet mit

$$\int_{\infty}^r F P_h = C_4 \int_{\infty}^r e^{-2\sqrt{\varepsilon_1} r} r^N \left\{ P_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_N dr = C_4 e^{-2\sqrt{\varepsilon_1} r} r^N \left\{ P_2 \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_N$$

das Resultat

$$P_{ih} = C_2 P_h - C_4 P_h \cdot \int_{r_w}^r \frac{r^{N-2K} \left\{ P_2 \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_N}{\left[\left\{ P_1 \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_N \right]^2} dr \dots \dots \dots (7,2),$$

wobei

$$C_2 = \frac{P_{ih}(r_w)}{P_h(r_w)}$$

bedeutet.

Die Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms P_2 läßt sich auch einfach aus den schon bekannten Koeffizienten a_n durchführen.

Setzt man

$$\left\{ P_2 \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_N = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1}} \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{r^n} \dots \dots \dots (7,3),$$

so gilt für die b_n die Rekursionsformel

$$b_n = -a_n + (N - n + 1) b_{n-1} \dots \dots \dots (7,4),$$

wobei $b_0 = -1$ zu setzen ist.

Wie sich später in der numerischen Rechnung zeigen wird, sind die Werte ungenauer, abgesehen davon, daß die Rechnung auch nicht schneller durchgeführt werden kann.

Schlußbemerkung

Die in dieser Arbeit vorliegenden Ergebnisse basieren im wesentlichen auf zwei analytischen Erkenntnissen.

Die eine ist die bekannte Möglichkeit der Darstellung von Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Lösung der homogenen Gleichung.

Die zweite analytische Erkenntnis ist die Darstellung der asymptotischen Lösung der vorgelegten Differentialgleichung der Wellenmechanik durch eine semikonvergente hypergeometrische Reihe, wobei man einen Teil der Reihe zur Darstellung der Lösung abspaltet.

Die Möglichkeit der Darstellung durch eine konfluente hypergeometrische Reihe hat R. Hartree in einer Arbeit „The wave mechanics of an atom“ (Proc. Cambr. Phil. Soc. Vol. 24, (1928) erwähnt. Die hier zugrunde liegende asymptotische Differentialgleichung ist unter der Annahme für das Potential $V = T/2 = C/r$ (C = Kernladungszahl)

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \left(\frac{2C}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) P = 0.$$

Auf die Praxis der Möglichkeit einer analytischen Durchführung wird dann nicht weiter eingegangen, abgesehen davon, daß die angegebene Form zu ungenau ist.

Damit ist der analytische Teil abgeschlossen und es folgt der numerische Teil, in dem einmal eine kurze Anleitung zur numerischen Rechnung gegeben wird und weiterhin die Methode an der auf andere Art durchgeführten Rechnung für das Zweielektronenspektrum von Mg^{++} einer numerischen Prüfung unterzogen wird.

III. Numerischer Teil

5. Rechenschemata zur Durchführung der numerischen Rechnung

Es ist zu berechnen

$$P(x) = x^K \cdot e^{-V_\varepsilon x} \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot \frac{1}{x^n} \right).$$

Dafür schreibt man

$$P(x) = e^{-V_\varepsilon x + K \cdot \ln x} \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot \frac{1}{x^n} \right) \quad \dots \quad (5,1).$$

Die Interpolation der Exponentialfunktion läßt sich durch die Exponentialreihe sehr schnell durchführen. Es ist

$$e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \left(1 + \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \right),$$

wobei x_0 der Numerus des Tafelwertes ist. Im allgemeinen kommt man bei einer im Numerus dreistelligen Tafel mit der hier geforderten Rechengenauigkeit mit dem in Δx linearen Glied aus, so daß die Rechnung für die e -Funktion in einem Rechengang in der Rechenmaschine erledigt werden kann.

Das Polynom

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{x^n}$$

berechnet man nach dem Hornerischen Schema.

Für die numerische Integration zwischen festen Grenzen genügt im allgemeinen die Simpsonsche Regel. Für die übrigen Integrationen ist es ratsam, unter Vermeidung der Aufstellung von Differenzenschemata folgende Formeln zu benutzen.

$$\left. \begin{aligned} \int_{a-h}^a f(x) dx &= \frac{h}{24} [9f(a-h) + 19f(a) - 5f(a+h) + f(a+2h)] \\ \int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx &= \frac{h}{24} [-f(a+h) + 13f(a) + 13f(a+h) - f(a+2h)] \\ \int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx &= \frac{h}{24} [f(a-h) - 5f(a) + 19f(a+h) + 9f(a+2h)] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5,2).$$

Der absolute Fehler ist im Mittel $\frac{h^5}{2 \cdot 4!} f^{IV}(\xi) \quad a-h \leq \xi \leq a+2h$.

6. Beispielrechnungen

Wie schon erwähnt, sollen die numerischen Ausgangswerte einer im wesentlichen für das Zweielektronenspektrum des Mg^{++} (Singlett) durchgeführten Rechnung entnommen werden.

Das System der Differentialgleichungen lautet:

$$\text{I. } P''(3s) + (T_1 - \varepsilon_{3s}) P(3s) + F_1 = 0,$$

$$\text{II. } P''(3p) + (T_2 - \varepsilon_{3p}) P(3p) + F_2 = 0,$$

wobei in T_1 , F_1 , T_2 und F_2 Integralausdrücke der Funktionen $P(3s)$ und $P(3p)$ selbst vorkommen. Das genaue Gleichungssystem läßt sich aus (1,6) ableiten, wenn man dort $4s$ durch $3s$, $3s$ durch $2s$, $2s$ durch $1s$, $4p$ durch $3p$ und $3p$ durch $2p$ ersetzt. $P(1s)$, $P(2s)$ und $P(2p)$ sind in r numerisch vorgegebene Funktionen, wobei über die Beschaffung dieser Funktionen hier nicht diskutiert werden soll¹⁾.

Zur Erlangung einer ersten Näherungsfunktion für die inhomogene Differentialgleichung I wird zunächst die homogene Gleichung I gelöst.

Aus dieser Rechnung wird zunächst der erste Iterationsschritt zur Bestimmung des $\Delta\varepsilon$ herausgenommen. Anschließend wird für den letzten Iterationsschritt mit dem dort angegebenen Eigenwert das Näherungspolynom für $r \geq r_w$ berechnet, während die Werte der Innenintegration nach dem bisherigen Verfahren übernommen werden.

a) Abschätzung der Eigenwertänderung zur Erfüllung der Regularitätsbedingung für die homogene Differentialgleichung I

Datenangaben.

$$l = 0$$

$$\varepsilon_{3s} = 0,463 \text{ erster geschätzter Wert}$$

$$T_1 = \frac{2}{r} - 0,03 \text{ Näherungsfunktion für die Außenintegration von homogen I}$$

$$\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_{3s} - b = 0,493 \text{ Eigenwert zur Polynomrechnung für } \Delta\varepsilon = 0$$

$$\varepsilon_1^{(2)} = 0,393 \text{ Eigenwert zur Polynomrechnung für } \Delta\varepsilon = -0,1$$

$$\left. \begin{array}{l} r_w = 4 \\ r_1 = 3,6 \end{array} \right\} 3,6 < r_0 < 4, \quad r_0 \text{ Wendepunktabzisse.}$$

r	$\varepsilon_{3s} = 0,463 (\Delta\varepsilon = 0)$		$\varepsilon_1^{(1)} = 0,493 (\Delta\varepsilon = 0)$	$\varepsilon_1^{(2)} = 0,393 (\Delta\varepsilon = -0,1)$
	$P(r)_{\text{innen}}$	$C_0 P_h(4) \int_{3,6}^{4,0} 1/P_h^2 d\tau$	$P_h(r)_{\text{außen}}$	$P(r)_{\text{außen}}$
$r_1 = 3,6$	0,658 437	0,561 966	0,716 889	0,680 714
$= 4,0$	0,644 332		0,644 332	0,644 332
ΔP	-0,014 105		-0,072 557	-0,036 382

Damit gilt für die Interpolation nach (2,13)

$$-0,014105 + \Delta\varepsilon \cdot 0,561966 = -0,072557 - \Delta\varepsilon \cdot 0,36175;$$

das ergibt

$$\Delta\varepsilon = -0,063,$$

$$\varepsilon = 0,400.$$

Der in der dortigen Rechnung angegebene Interpolationswert für ε unter Zulassung eines Fehlers des logarithmischen Differenzenquotienten für $r=r_w$ von 5% ist 0,396. Zur Ermittlung dieses Wertes wurden 2 Interpolationsschritte mit insgesamt 3 Außen- und 3 Innenintegrationen durchgeführt, während die beschriebene Methode lediglich eine Innenintegration und zwei Polynom-berechnungen der Außenintegration für die Anfangswerte 3,6 und 4 mit den Anschlußwerten bei $r=4$ notwendig machen.

Selbst wenn $\varepsilon=0,400$ eine etwas größere Abweichung der Regularitätsbedingung als 1% ergeben würde, was numerisch nicht nachgeprüft ist, würde die Genauigkeit dieses Wertes weitaus reichen, um damit als 1. Näherung in die inhomogene Differentialgleichung einzugehen.

b) Berechnung des Polynoms für die Außenintegration der homogenen Differentialgleichung
Datenangaben.

$$l = 0$$

$$\varepsilon_{3s} = 0,396$$

$$r_w = 4$$

$$T_1 = \frac{a}{r} - b \text{ Näherungsfunktion für } r \geq r_w.$$

¹⁾ Die numerischen Rechnungen nach dem bisherigen Verfahren des Probierens und die hier angegebenen Versuchsrechnungen sind in der „Astrophysikalischen Abteilung“ des Max-Planck-Instituts für Physik, Göttingen, durchgeführt worden, wo gegebenenfalls die Unterlagen einzusehen sind.

Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen sind in Zahlentafel I zusammengestellt.

- Spalte 1: Exakte Werte der T -Funktion für $4 \leq r \leq 10$.
 Spalte 2: Polynomrechnung für $a = 2$; $b = -0,02$ mit Annäherung der T -Funktion für $4 \leq r \leq 10$.
 Spalte 3: Polynomrechnung für $a = 2$; $b = -0,03$ mit Annäherung der T -Funktion für $4 \leq r \leq 10$.
 Spalte 4: Numerische Integration nach außen mit den Ausgangswerten $0,408678$ ($r=5$); $0,345834$ ($r=5,5$).
 Spalte 5: Polynomrechnung für $a = 1,951730$; $b = -0,023$ mit Annäherung der T -Funktion für $4 \leq r \leq 20$.
 Spalte 6: Numerische Integration nach innen mit den Ausgangswerten $k \cdot 0,000221$ ($r=20$), $k \cdot 0,000293$ ($r=19,5$), wobei k so bestimmt wird, daß der Ordinatenanschluß bei $r=4$ gewährleistet ist.
 Spalte 7: Numerische Integration nach innen mit der bisherigen Methode des Probierens.

Zahlentafel I

r	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	$T_1(r)$	Polynomrechnung			P_{3s} $a = 1,951730$ $b = -0,023$		P_{3s} (integriert)
		P_{3s} ($b = -0,02$)	P_{3s} ($b = -0,03$)				
4	0,480 334	0,536 830	0,536 830	—	0,536 830	0,536 830	0,536 830
4,5	0,416 067	0,477 526	0,474 009	—	0,473 185	0,474 174	0,474 173
5	0,368 480	0,414 591	0,408 678	0,408 678	0,407 576	0,408 826	0,408 825
5,5	0,331 737	0,353 138	0,345 834	0,345 834	0,344 727	0,346 087	0,346 085
6	0,302 345	0,296 189	0,288 253	0,288 415	0,287 362	0,288 779	0,288 777
6,5	0,278 147	0,245 279	0,237 296	0,237 670	0,236 539	0,238 153	0,238 152
7	0,257 775	0,200 958	0,193 309	0,193 883	0,192 760	0,1944 99	0,194 497
7,5	0,240 319	0,163 155	0,156 075	0,156 771	0,155 716	0,157 541	0,157 539
8	0,225 156	0,131 427	0,125 046	0,125 751	0,124 847	0,126 704	0,126 702
8,5	0,211 834	0,105 148	0,099 515	0,100 098	0,099 441	0,101 276	0,101 274
9	0,200 026	0,083 620	0,078 731	0,079 057	0,078 747	0,080 513	0,080 511
9,5	0,189 477	0,066 146	0,061 962	0,061 893	0,062 043	0,063 700	0,063 698
10	0,179 992	0,0520 77	0,048 538	0,047 932	0,048 658	0,050 184	0,050 181
10,5	—	—	—	—	0,038 004	0,039 383	0,039 380
11	—	—	—	—	0,029574	0,030798	0,030796
11,5	—	—	—	—	0,022935	0,024010	0,024007
12	—	—	—	—	0,017 733	0,018 664	0,018 661
12,5	—	—	—	—	0,013 672	0,014 470	0,014 467
13	—	—	—	—	0,010 514	0,011 191	0,011 188
13,5	—	—	—	—	0,008 066	0,008 636	0,008 633
14	—	—	—	—	0,006 175	0,006 651	0,006 648
14,5	—	—	—	—	0,004 716	0,005 112	0,005 109
15	—	—	—	—	0,003 597	0,003 923	0,003 919
15,5	—	—	—	—	0,002 738	0,003 004	0,003 001
16	—	—	—	—	0,002 080	0,002 297	0,002 294
16,5	—	—	—	—	0,001 577	0,001 754	0,001 751
17	—	—	—	—	0,001 195	0,001 337	0,001 333
17,5	—	—	—	—	0,000 904	0,001 017	0,001 013
18	—	—	—	—	0,000 684	0,000 773	0,000 768
18,5	—	—	—	—	0,000 516	0,000 588	0,000 579
19	—	—	—	—	0,000 389	0,000 446	0,000 435
19,5	—	—	—	—	0,000 293	0,000 338	0,000 323
20	—	0,000 249	0,000 213	—	0,000 221	0,000 255	0,000 236

Die Ergebnisse der Spalte 2 und 3 sollen zeigen, daß die maximale Differenz zwischen a/r und dem exakten Wert von T der geeignetste Wert von b ist, was sich auch in allen anderen Rechnungen zeigte. In Spalte 5 wird gezeigt, daß es im Durchschnitt günstig ist, die Annäherung der T -Funktion über den größten betrachteten Bereich zu erstrecken.

Eine numerische Integration nach außen (Spalte 4) erweist sich als wesentlich schlechter als eine Integration nach innen (Spalte 6), wenn die Ausgangswerte der Polynomrechnung entnommen werden. Es zeigt sich also, daß man die Polynomrechnung auch lediglich dazu benutzen kann, gute Ausgangswerte für eine numerische Integration zu gewinnen, ohne die Methode des Probierens anwenden zu müssen, wenn der Eigenwert zuvor zur Erfüllung der Regularität im Wendepunkt nach obigem Verfahren bestimmt wurde.

In jedem Fall ist die Genauigkeit jedenfalls den Anforderungen einer Iterationsrechnung vollauf gewachsen.

c) Beispielrechnungen für die inhomogenen Differentialgleichungen

Für beide Differentialgleichungen I und II wird aus den bestehenden Rechnungen einer der letzten Iterationsschritte herausgegriffen. Es wird an beiden beschriebenen Methoden der Doppelintegration sowie der einfachen Integration gezeigt, wie weit die Polynomrechnungen den Genauigkeitsanforderungen genügen. Es wird zunächst Gleichung I betrachtet.

Daten angeben.

$$l = 0$$

$$r_w = 4$$

$$\varepsilon_3 = 0,680$$

$$T_1 = \frac{2,91004}{r} - 0,11 \text{ Näherungsfunktion für } r \geq r_w$$

$$\varepsilon = 0,790$$

$$F_1 = 0,009308 \cdot e^{-\sqrt{\varepsilon} \cdot r} r^{5-K} \text{ Näherungsfunktion für } r \geq r_w$$

Zahlentafel II gibt die Lösung der homogenen Differentialgleichung für $r \geq r_w$ als Polynomrechnung an, sowie die Werte der inhomogenen Näherungsintegrationen aus der homogenen Polynomrechnung und zum Vergleich die Werte der numerisch nach Numerow integrierten exakten Differentialgleichung.

Zahlentafel II

r	(1)	(2)			(3)	(4)
	polynom $P_h(3s)$	$P_{ih}^2(3s)$ Doppelintegral			$P_{ih}^2(3s)$ einfaches Integral	$P_{ih}^4(3s)$ integrierte Diff.-Gleichung
4,0	0,571 039	0,413 025	—	((0,404 523))	0,413 025	0,413 025
4,4	0,475 308	0,331 661	—	((0,325 468))	0,330 747	0,332 563
4,8	0,389 161	0,261 216	(0,261 216)	((0,256 423))	0,259 484	0,262 237
5,2	0,314 329	0,202 244	(0,202 244)	((0,198 460))	0,199 854	0,203 157
5,6	0,251 012	0,154 151	(0,154 108)	((0,151 195))	0,151 301	0,154 946
6,0	0,198 514	0,115 751	(0,115 679)	((0,113 512))	0,112 649	0,116 479
6,4	0,155 694	0,085 636	(0,085 535)	((0,084 009))	0,082 485	0,086 338
6,8	0,121 226	0,062 387	(0,062 229)	((0,061 263))	0,059 354	0,063 077
7,2	0,093 787	0,044 695	(0,044 424)	((0,043 961))	0,041 893	0,045 366
7,6	0,072 149	0,031 411	(0,030 953)	((0,030 965))	0,028 933	0,032 045
8,0	0,055 226	0,021 574	(0,020 835)	((0,021 324))	0,019 463	0,022 146
8,4	0,042 083	0,014 387	(0,013 264)	((0,014 262))	0,012 649	0,014 881
8,8	0,031 933	0,009 213	(0,007 586)	((0,009 161))	0,007 858	0,009 619
9,2	0,024 145	0,005 553	(0,003 273)	((0,005 537))	0,004 535	0,005 866
9,6	0,018 195	0,003 013	(-0,000 103)	((0,003 013))	0,002 298	0,003 237
10,0	0,013 668	0,001 300	(-0,002 899)	((0,001 300))	0,000 847	0,001 437
10,4	—	0,000 182	—	—	—	0,000 238
10,8	—	-0,000 507	—	—	—	-0,000 528
11,2	—	-0,000 891	—	—	—	-0,000 989
11,6	—	-0,001 060	—	—	—	-0,001 236
12,0	—	-0,001 077	—	—	—	-0,001 340
12,4	—	-0,000 984	—	—	—	-0,001 348
12,8	—	-0,000 807	—	—	—	-0,001 296

Die homogene Rechnung ist zur möglichst genauen Bestimmung der Konstanten C_4 bis $r=20$ durchgeführt worden, während die inhomogenen Näherungsrechnungen im wesentlichen zunächst analog der Bestimmung der Näherungsfunktionen für T_1 und F_1 bis $r=10$ erfolgt sind. (Die Zahlentafeln hierzu konnten aus Platzmangel nicht veröffentlicht werden.)

Die unter dem waagerechten Strich stehenden Werte sind lediglich zum zusätzlichen Vergleich gerechnet worden.

Es zeigt sich zunächst, daß die näherungsweise berechneten Funktionswerte $P_{ih}(3s)$ in dem Bereich von $r=4$ bis 10 mindestens für eine Iterationsrechnung vollauf genügen, wobei die Werte der Doppelintegration genauer sind.

Im weiteren Verlauf über $r=10$ hinaus wird die Rechnung ungenauer, da der Integrand $1/P_h^2$ sehr groß wird und damit die Auswertung des Integrals ungenau, wenn man die Intervalllängen des Arguments beibehält.

Außerdem lohnt sich eine Weiterrechnung schon deshalb nicht, weil die Funktionswerte so klein sind, daß sie ohne Einfluß auf die gesamte Iterationsrechnung bleiben.

Es ist nur interessant festzustellen, daß für große Werte von r noch kleine Extremwerte der Funktion vorhanden sind, bevor die inhomogene Lösung in die positive Lösung der homogenen Gleichung übergeht.

Hier besteht auch eine wesentliche Schwierigkeit, wenn man die Außenintegration numerisch bei einem großen Argumentwert beginnen will. Man hat weder einen Anhaltspunkt für die Größenordnung der Funktionswerte noch kennt man das Vorzeichen, so daß man hier lediglich auf entsprechend häufiges Probieren angewiesen ist, was durch die Forderung der Ordinatenübereinstimmung und Regularität besonders mühsam ist.

Die in Spalte 2 stehenden eingeklammerten Werte $[(\quad)]$ erhält man wiederum durch numerische Integration nach außen mit den Anfangswerten $P_{th}(4,8)=0,261\,216$ und $P_{th}(5,2)=0,202\,224$, die Ergebnisse sind schlechter als die der Doppelintegration. Die weiteren eingeklammerten Werte in Spalte 2 $[[(\quad)]]$ ergeben sich aus der numerischen Außenintegration mit den Anfangswerten der Polynomrechnung bei $r=10$ und $9,6$. Der Differenzenquotient der logarithmischen Ableitungen der Innen- und Außenintegration und der Ordinaten am Wendepunkt differieren etwa um 2%. Man kann hier schon bemerken, daß es keine große Schwierigkeit bedeuten würde, die nun schon für $r=10$ und $9,6$ ziemlich genau bestimmten Ordinaten so zu ändern, daß vor allem die Ordinatenübereinstimmung bis auf $100/100$ genau wird. Das gleiche ergibt sich auch später in der Rechnung für Gleichung II, wobei die Übereinstimmung noch besser wird, da auch die T -Funktion über einen größeren Bereich angenähert wird. Die Abschätzung der Eigenwertänderung zur Erfüllung der Regularität soll hier für den 1. Iterationsschritt der Gleichung I gerechnet werden.

Die 1. Eigenwertschätzung wurde mit $\varepsilon=0,77$ angesetzt, ε wurde wieder mit $-0,1$ variiert, wobei die Ordinatenübereinstimmung für $r=3,6$ durchgeführt wurde.

r	$\varepsilon = 0,77 (\Delta \varepsilon = 0)$		$\Delta \varepsilon = 0$	$\Delta \varepsilon = -0,1$
	$P(r)_{\text{Innen}}$	$C_0 P_h^4(4) \int_{3,6}^{4,0} \frac{1}{P_h^2} dr$	$P(r)_{\text{außen}}$	$P(r)_{\text{außen}}$
3,6	0,421 878	0,471 391	0,421 878	0,421 878
4,0	0,369 299		0,338 318	0,355 478
ΔP	-0,052 579		-0,083 560	-0,066 400

$$\Delta \varepsilon = -0,048$$

Damit berechnet sich der Eigenwert unter Berücksichtigung der Regularität zu $\varepsilon=0,722$.

Ein mehrfaches Probieren ergab bei einer zulässigen Differenz der logarithmischen Ableitung am Wendepunkt von 1% einen Eigenwert von $\varepsilon=0,725$. Zur Ermittlung wurden mehrere Innen- und Außenintegrationen benötigt, wobei der Eigenwert und Anfangswerte für die Außenintegration nach bestem Ermessen variiert werden mußten. Mit der oben erwähnten Methode kann man durch eine grobe Variation von ε unter Benutzung der homogenen Teillösungen für innen und außen in einem Interpolationsschritt den richtigen Eigenwert ermitteln, wobei man für die inhomogene Lösung nur einige Punkte im Bereich des Wendepunktes benötigt. Ein Probieren bei großen r -Werten ist damit nicht mehr nötig. Für den so ermittelten Eigenwert kann dann die richtige Lösung mit regulärem Verhalten im Wendepunktbereich durchgerechnet werden. Eine analoge Rechnung ist auch für Gleichung II durchgeführt worden. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel III aufgeführt.

Die einzelnen Daten sind

$$\begin{aligned} l &= 1 \\ r_w &= 7,2 \\ \varepsilon_{sp} &= 0,2373 \\ T_1 &= \frac{2,071741}{r} - 0,005436 \text{ Näherungsfunktion für } r \geq r_w \\ \varepsilon_1 &= 0,242736 \\ F_1 &= -0,000446 \cdot e^{-\sqrt{\varepsilon_1} r} r^{5-K} \text{ Näherungsfunktion für } r \geq r_w. \end{aligned}$$

Es zeigt sich auch hier, daß in jedem Fall die Auswertung des Doppelintegrals vorzuziehen ist, da dieses mit einem nicht größeren Rechenaufwand die genauesten Werte liefert.

Die in Spalte 2 (Zahlentafel III) in Klammern stehenden Werte ergeben sich aus der numerischen Außenintegration der Differentialgleichung II mit den Anfangswerten des Doppelintegrals für $r=20$ und $r=19,6$. Die Differenz zwischen dem logarithmischen Differenzenquotienten der Innen- und Außenintegration ergibt sich mit 1%, die Ordinatendifferenz am Wendepunkt mit $1\frac{1}{2}\%$. Mit der schon verhältnismäßig guten Ordinatenübereinstimmung läßt sich unschwer eine Änderung der Ordinaten bei $r=20$ und $19,6$ ermitteln, um auch bei $r=r_w$ eine Ordinaten-

Zahlentafel III

r	(1)	(2)		(3)	(4)	(5)
	Polynom $P_h(3p)$	Doppelintegral $P_{ih}(3p)$		Einfaches Integral $N = 5,0$ $P'_{ih}(3p)$	Einfaches Integral $N = 4,0$ $P_{ih}(3p)$	Integrierte Differential- gleichung $P_{ih}(3p)$
7,2	1,730 208	-0,355 720	(-0,350 732)	-0,355 720	-0,355 720	-0,355 720
7,6	1,596 149	-0,331 275	(-0,326 953)	-0,331 584	-0,330 869	-0,331 554
8,0	1,465 183	-0,306 863	(-0,302 736)	-0,307 489	-0,306 091	-0,306 951
8,4	1,336 627	-0,282 377	(-0,278 622)	-0,283 330	-0,281 303	-0,282 463
8,8	1,213 211	-0,258 432	(-0,255 035)	-0,259 719	-0,257 130	-0,258 517
9,2	1,096 153	-0,235 372	(-0,232 298)	-0,236 962	-0,233 889	-0,235 437
9,6	0,986 261	-0,213 400	(-0,210 641)	-0,215 277	-0,211 805	-0,213 459
10,0	0,883 996	-0,192 684	(-0,190 223)	-0,194 817	-0,191 029	-0,192 743
10,4	0,789 551	-0,173 323	(-0,171 143)	-0,175 671	-0,171 647	-0,173 386
10,8	0,702 910	-0,155 365	(-0,153 448)	-0,157 887	-0,153 701	-0,155 436
11,2	0,623 900	-0,138 821	(-0,137 149)	-0,141 471	-0,137 194	-0,138 902
11,6	0,552 230	-0,123 671	(-0,122 222)	-0,126 405	-0,122 100	-0,123 762
12,0	0,487 526	-0,109 869	(-0,108 624)	-0,112 650	-0,108 368	-0,109 969
12,4	0,429 363	-0,097 357	(-0,096 295)	-0,100 146	-0,095 935	-0,097 464
12,8	0,377 284	-0,086 062	(-0,085 164)	-0,088 828	-0,084 726	-0,086 174
13,2	0,330 819	-0,075 907	(-0,075 155)	-0,078 622	-0,074 658	-0,076 019
13,6	0,289 500	-0,066 809	(-0,066 184)	-0,069 449	-0,065 649	-0,066 917
14,0	0,252 867	-0,058 684	(-0,058 170)	-0,061 231	-0,057 613	-0,058 784
14,4	0,220 479	-0,051 449	(-0,051 032)	-0,053 891	-0,050 466	-0,051 537
14,8	0,191 919	-0,045 027	(-0,044 692)	-0,047 351	-0,044 128	-0,045 097
15,2	0,166 795	-0,039 340	(-0,039 074)	-0,041 539	-0,038 522	-0,039 386
15,6	0,144 743	-0,034 315	(-0,034 108)	-0,036 386	-0,033 575	-0,034 332
16,0	0,125 429	-0,029 885	(-0,029 727)	-0,031 828	-0,029 220	-0,029 868
16,4	0,108 546	-0,025 988	(-0,025 869)	-0,027 803	-0,025 393	-0,025 930
16,8	0,093 815	-0,022 566	(-0,022 479)	-0,024 256	-0,022 038	-0,022 461
17,2	0,080 985	-0,019 564	(-0,019 504)	-0,021 136	-0,019 102	-0,019 405
17,6	0,069 828	-0,016 938	(-0,016 897)	-0,018 396	-0,016 537	-0,016 717
18,0	0,060 141	-0,014 641	(-0,014 616)	-0,015 993	-0,014 299	-0,014 349
18,4	0,051 743	-0,012 635	(-0,012 621)	-0,013 890	-0,012 350	-0,012 263
18,8	0,044 472	-0,010 885	(-0,010 878)	-0,012 051	-0,010 656	-0,010 422
19,2	0,037 805	-0,009 266	(-0,009 357)	-0,010 341	-0,009 093	-0,008 790
19,6	0,032 785	-0,008 029	(-0,008 029)	-0,009 045	-0,007 908	-0,007 339
20,0	0,028 077	-0,006 869	(-0,006 869)	-0,007 826	-0,006 803	-0,006 400

übereinstimmung mit einem Fehler von 10^{-6} zu erreichen. Man erkennt hieraus, daß die Auswertung des Doppelintegrals auch für eine numerische Außenintegration sehr gute Ausgangswerte liefert.

Zusammenfassung

Die numerische Durchführung der Versuchsrechnungen hat gezeigt, daß sich im Falle des Ein- und Zweielektronenspektrums eine analytische Behandlung des Differentialgleichungssystems vor allem für das asymptotische Verhalten lohnt. Die Methode des Probierens zur Erfüllung der Regularitätsbedingung kann durch analytische Überlegungen erheblich abgekürzt oder ganz fallen gelassen werden, womit sich im Rechnungsgang eine bedeutende Zeitersparnis ergibt.

Es hat sich vor allem gezeigt, daß im Bereich der r -Werte, in denen die Außenintegration numerisch begonnen wird, im homogenen wie im inhomogenen Fall keineswegs eine reine Exponentialfunktion in r anzusetzen ist. Die damit gerechneten Anfangswerte sind weitaus zu klein. Im homogenen Fall läßt sich dieser Fehler hinterher durch einen Faktor korrigieren, was aber keinesfalls im inhomogenen Fall möglich ist.

Die aufgezeigte Integration der asymptotischen Differentialgleichung ergibt dafür recht gute Ausgangswerte für eine numerische Integration.

Das Iterationsverfahren bleibt im Prinzip unberührt. Hierbei ist lediglich auf einen Weg verwiesen, die Anfangswerte der Integration vom Nullpunkt so zu bestimmen, daß die integrierte Funktion nahezu normiert ist, so daß eine nachträgliche Normierung keine wesentliche Änderung der rechten Seite der Differentialgleichung ergeben würde.

Eingegangen: 5. 11. 1948.

Das Bildungsgesetz für die Fehlerformeln beim Ausgleichen von fehlerhaften Meßreihen mit Hilfe ganzer rationaler Funktionen wachsender Ordnung

Von K. Stange in Karlsruhe

Die beim Ausgleichen von Meßwerten mit Hilfe von endlichen Potenzreihen geltenden Gesetze für die Fortpflanzung der Meßfehler und für die Fälschung der Funktionswerte werden in „Determinantenform“ aufgestellt. Indem man diese Determinanten nach fallenden Potenzen der Punktzahl n entwickelt, findet man äußerst einfache, für „große“ Punktzahlen n gültige „asymptotische“ Gesetze.

The laws valid for the propagation of errors and the falsification of the values of the function in the case of smoothing measured values by finite power series are stated in a „determinant form“. By expanding the determinant in decreasing powers of the number n of the measuring points, extremely simple asymptotic laws are found valid for large numbers n .

Законы, действительные для распространения погрешностей и для искажения значений функции в случае выравнивания результатов при помощи конечных степенных рядов, представляются в форме определителей. При раскрытии этих определителей по убывающим степеням числа n точек измерения получаются очень простые „асимптотические“ законы, действительные для больших чисел n .

1. Einleitung

Über die Verfahren des Ausgleichens fehlerbehafteter Meßreihen gibt es ein ausgedehntes Schrifttum¹⁾. Trotzdem stehen zwei Fragen dabei noch verhältnismäßig im Hintergrund, nämlich die Auswirkung f_P des Meßfehlers μ der Ausgangswerte x auf die geglätteten Werte \bar{x} (und ihre Ableitungen \bar{x}', \dots) und die mit dem Glätten zwangsläufig verbundene Fälschung f_M dieser Werte. In welcher Weise der „physikalische“ Fehler f_P und der „mathematische“ f_M des geglätteten Wertes \bar{x} von dem benutzten mathematischen Aufwand, d. h. von der Ordnung R der Ausgleichfunktion und von der jeweils zusammengefaßten Punktzahl N , abhängen, wurde im Falle ganzer rationaler Ausgleichfunktionen niedrigen Grades R kürzlich erörtert²⁾. Da in jener Arbeit praktische Gesichtspunkte im Vordergrund standen, so war die dort vorgenommene Beschränkung auf den Fall $R \leq 5$ kein Nachteil. Da jedoch das Bildungsgesetz, dem die Fehlergleichungen mit wachsender Ordnung R der Ausgleichfunktion gehorchen, für f_P nur andeutungsweise und für f_M gar nicht hervortritt, soll die Frage im folgenden wenigstens für die Funktionswerte und ihre erste Ableitung noch einmal in größerer Allgemeinheit aufgegriffen werden. Dabei wird es gelingen, für „große“ Punktzahlen n geltende „asymptotische“ Gesetze von sehr einfacher Form aufzustellen. Diese Gesetze lassen sich dann mit Hilfe einer von Willers angegebenen Lösung der Ausgleichaufgabe³⁾, die für „kleine“ Punktzahlen n gültig ist, auf „das unbekannte Zwischengebiet ausdehnen“⁴⁾.

2. Das Bildungsgesetz für L_{2r} und M_{2r+2}

Glättet man eine ausgedehnte Reihe von Meßpunkten $\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots$, welche in gleichen Abständen $\Delta t = \tau$ aufeinanderfolgen, indem man abschnittsweise durch je $N = 2n + 1$ aufeinanderfolgende Punkte $x_{k-n}, \dots, x_k, \dots, x_{k+n}$ die „beste“ ganze rationale Funktion vom Grade R ,

$$\bar{x}(t) = \sum_{q=0}^R a_q \left(\frac{t}{\tau} \right)^q \dots \dots \dots (1),$$

legt, so ist der ausgeglichene Wert \bar{x}_k an der Stelle t_k

$$\bar{x}_k = \sum_{v=-n}^{+n} \lambda_v x_{k+v} \dots \dots \dots (2).$$

Die Gewichte λ_v , mit denen man die einzelnen x -Werte zu multiplizieren hat, sind in der Form⁴⁾

$$\lambda_v = \frac{1}{D_{0,r+1}} \begin{vmatrix} 1 & S_2 & \dots & S_{2r} \\ v^2 & S_4 & \dots & S_{2r+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v^{2r} & S_{2r+2} & \dots & S_{4r} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

¹⁾ Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, S. 239 u. f. Berlin und Leipzig 1928. (Im folgenden Willers I genannt.) — C. Runge und H. König: Numerisches Rechnen, S. 189 u. f. Berlin 1924. — Blaschke: Vorlesungen über mathematische Statistik, S. 192 u. f. Berlin und Leipzig 1906. — Whittacker und Robinson, The calculus of observations, S. 285 u. f. London 1926.

²⁾ K. Stange: Die zweckmäßige Auswertung von punktwise aufgenommenen Zeit-Weglinien. Ing.-Arch. 1948, S. 383.

³⁾ Fr. A. Willers: Das Glätten empirisch gefundener Zahlenreihen. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 166. (Im folgenden Willers II genannt.)

⁴⁾ Stange: a. a. O. S. 387, Gl. (10) und (9).

darstellbar. Mit $D_{p,r}$ bezeichnen wir allgemein eine r -reihige Determinante, welche als erstes Element die Summe S_p besitzt und deren übrige Elemente „von S_p aus“ der unendlich ausgedehnten Matrix

$$\begin{array}{ccccccc} S_0 & S_2 & S_4 & \dots & & & \\ S_2 & S_4 & S_6 & \dots & & & \\ S_4 & S_6 & S_8 & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & & \end{array} \quad (4)$$

entnommen sind.

Die Zahlen S_p sind die Potenzsummen

$$S_0 = 2n + 1; \quad S_p = \sum_{v=-n}^{+n} v^p = 2 \sum_{v=1}^n v^p; \quad p \text{ gerade und } \geq 2 \quad (5).$$

Wir setzen voraus, daß die ursprünglichen x -Werte mit dem Meßfehler μ behaftet sind. Nimmt man für alle an der Bildung des gewogenen Mittels \bar{x}_k beteiligten x -Werte x_{k-n}, \dots, x_{k+n} die gleiche Meßgenauigkeit an, was bei dichter Meßfolge erlaubt ist, so ist der „physikalische Fehler“ von \bar{x}_k

$$f_P(R; N) = \sqrt{\sum_{v=-n}^{+n} \lambda_v^2} \mu = L_{2r} \mu \quad (6).$$

Der „mathematische Fehler“ f_M wird bei Verwendung einer ganzen rationalen Funktion vom Grade $R = 2r$ oder $R = 2r + 1$ in erster Näherung⁵⁾

$$f_M(R; N) = \frac{1}{(2r+2)!} x_k^{(2r+2)} \tau^{2r+2} M_{2r+2} \dots \quad (7_1),$$

wobei

$$M_{2r+2} = \sum_{v=-n}^{+n} v^{2r+2} \lambda_v = (-1)^r \frac{D_{2r+1}}{D_{0,r+1}} \dots \quad (7_2)$$

das auf die Bereichsmittle bezogene Moment der Ordnung $2r+2$ der Einflußzahlen λ , ist.

Maßgebend für Fehlerfortpflanzung und Fälschung sind also letzten Endes die Ausdrücke L_{2r} und M_{2r+2} . Durch (7₂) ist M_{2r+2} mit Hilfe der Determinanten $D_{p,r+1}$ ausgedrückt. Für L_{2r} wollen wir die entsprechende Form noch herleiten.

Multipliziert man (3) mit λ_v , summiert die entstehenden Ausdrücke über v von $-n$ bis $+n$ und berücksichtigt dabei, daß $\sum_v \lambda_v = 1$ ist und daß sämtliche Momente $M_\alpha = \sum_v v^\alpha \lambda_v$ für $2 \leq \alpha \leq 2r$ verschwinden, so vereinfacht sich die auf der rechten Seite erscheinende Determinante zu $D_{4,r}$. Damit haben wir das Bildungsgesetz

$$\sum_{v=-n}^{+n} \lambda_v^2 = L_{2r}^2 = \frac{D_{4,r}}{D_{0,r+1}} \dots \quad (8)$$

für die Summe der Gewichtsquadrate gefunden.

Man sieht, daß es möglich ist, mit (8) und (7₂) allgemeine Aussagen über Fehlerfortpflanzung und Fälschung zu machen, wenn es gelingt, die Determinanten $D_{p,r+1}$ der Berechnung zugänglich zu machen.

Aus (8) und (3) folgt im übrigen ohne jede Vernachlässigung für alle N und R die Beziehung

$$\sum_{v=-n}^{+n} \lambda_v^2 = \lambda_0 \quad (8_1),$$

d. h. die Summe der Gewichtsquadrate ist gleich dem Gewicht λ_0 des Ausgangswertes x_k in der Mitte des Bereichs.

3. Umformung der Determinante $D_{p,r+1}$

Die Berechnung von $D_{p,r+1}$ ist zwar in voller Allgemeinheit (d. h. für beliebige Werte von n und r) nicht möglich. Wir werden jedoch für „genügend große“ Punktzahlen n zu brauchbaren einfachen Ergebnissen gelangen. Für die Summen S_p gilt nämlich die Entwicklung⁶⁾ nach Potenzen von n

$$S_p(n) = 2n^p \left[\frac{n}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} B_2 \left(\frac{p}{1} \right) \frac{1}{n} + \frac{1}{4} B_4 \left(\frac{p}{3} \right) \frac{1}{n^3} + \dots \right] \quad (9_1),$$

⁵⁾ Stange: a. a. O. S. 392, Gl. (23₄) und S. 387, Gl. (11₄).

⁶⁾ Willers I: a. a. O. S. 127, Gl. (13). — Whittaker: a. a. O. S. 292.

wobei

$$B_2 = +\frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = +\frac{1}{42}, \dots \quad (9_2),$$

die Bernoullischen Zahlen⁷⁾ sind. Ersichtlich darf $S_p(n)$ mit wachsendem n immer besser durch den Ausdruck

$$S_p(n) \approx 2n^p \left[\frac{n}{p+1} + \frac{1}{2} \right] \quad (9_3)$$

ersetzt werden, der bereits eine brauchbare Näherung darstellt, wenn $n > p+1$ ist. Setzt man $S_p(n)$ gemäß (9₁) in die Determinante $D_{p,r+1}$ ein, dann läßt sich aus jeder Spalte der Faktor $2n^p$ herausnehmen. Außerdem liefern die Spalten 2, 4, ..., $2r$ noch die Faktoren n^2, n^4, \dots, n^{2r} . Die gleichen Faktoren lassen sich aber auch aus den Zeilen 2, 4, ..., $2r$ absondern. Insgesamt kommt

$$D_{p,r+1} = (2n^p)^{r+1} n^{2r(r+1)} \Delta_{p,r+1} \quad (10_1)$$

mit

$$\Delta_{p,r+1} = \begin{vmatrix} \frac{n}{p+1} + \frac{1}{2} + \dots; & \frac{n}{p+3} + \frac{1}{2} + \dots; & \dots; & \frac{n}{p+2r+1} + \frac{1}{2} + \dots; \\ \frac{n}{p+3} + \frac{1}{2} + \dots; & \frac{n}{p+5} + \frac{1}{2} + \dots; & \dots; & \frac{n}{p+2r+3} + \frac{1}{2} + \dots; \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{p+2r+1} + \frac{1}{2} + \dots; & \frac{n}{p+2r+3} + \frac{1}{2} + \dots; & \dots; & \frac{n}{p+4r+1} + \frac{1}{2} + \dots; \end{vmatrix} \quad (10_2).$$

In der Determinante $\Delta_{p,r+1}$ ist jedes Element in bezug auf n von erster Ordnung. Entwickelt man sie nach Potenzen von n , so beginnt die Entwicklung mit n^{r+1} . Mit (10₁) wird aus (8) und (7₂)

$$L_{2r}^3 = \frac{2^r n^{4r} n^{2(r-1)r}}{2^{r+1} n^{2r(r+1)}} \frac{\Delta_{4,r}}{\Delta_{0,r+1}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{4,r}}{\Delta_{0,r+1}} \quad (11)$$

und

$$M_{2r+2} = (-1)^r \frac{2^{r+1} n^{2(r+1)} n^{2r(r+1)}}{2^{r+1} n^{2r(r+1)}} \frac{\Delta_{2,r+1}}{\Delta_{0,r+1}} = (-1)^r n^{2r+2} \frac{\Delta_{2,r+1}}{\Delta_{0,r+1}} \quad (12).$$

Da $\Delta_{p,r}$ in bezug auf n vom Grade r ist, so streben die Quotienten

$$\frac{n \Delta_{4,r}}{\Delta_{0,r+1}} \equiv l_{2r}^3(n) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta_{2,r+1}}{\Delta_{0,r+1}} \equiv m_{2r+2}(n) \quad (13)$$

mit wachsendem n gegen feste nur noch von r aber nicht mehr von n abhängige Zahlen, die wir mit l_{2r}^{3*} und m_{2r+2}^* bezeichnen wollen, um anzudeuten, daß sie nur von der Ordnung R der Ausgleichfunktion aber nicht mehr von der jeweils zusammengefaßten Punktzahl N abhängen.

Mit dem bisherigen Ergebnis sind wir imstande, schon ein paar wesentliche allgemeine Eigenschaften der Fehler f_P und f_M auszusprechen. Der physikalische Fehler (6) hat nämlich die Gestalt

$$f_P(R; N) = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} l_{2r}(n) \quad (14_1)$$

oder in erster Näherung

$$f_P(R; N) \approx \frac{\mu}{\sqrt{N}} l_{2r}^* \quad (14_2),$$

und für den mathematischen Fehler (7₁) gilt

$$f_M(R; N) = \frac{(-1)^r}{(2r+2)!} x_k^{(2r+2)}(n\tau)^{2r+2} m_{2r+2}(n) \quad (15_1)$$

oder in erster Näherung

$$f_M(R; N) \approx \frac{(-1)^r}{(2r+2)!} x_k^{(2r+2)}(n\tau)^{2r+2} m_{2r+2}^* \quad (15_2).$$

Für „genügend große“ Punktzahlen n ist demnach der physikalische Fehler f_P des geglätteten Wertes \bar{x} bei Verwendung von Ausgleichfunktionen beliebiger Ordnung R in erster Näherung umgekehrt verhältnismäßig zur Wurzel aus der Gesamtpunktzahl $N = 2n + 1$.

⁷⁾ K. K n o p p: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 182. Berlin 1924.

Der mathematische Fehler f_M ist bei Verwendung von Ausgleichfunktionen der Ordnung $R=2r$ und $R=2r+1$ in erster Näherung verhältnismäßig zur $(2r+2)$ -ten Potenz der „Bereichsbreite“ $B=n\tau$. f_M hängt also (eigentlich nicht von der Punktzahl n sondern) nur von dem Produkt $n\tau$ ab und wird infolgedessen nicht (wesentlich) beeinflusst, wenn man die Zahl N der in einem festen Bereich $2B = \text{konst}$ enthaltenen Meßpunkte ändert.

4. Berechnung von f_P und f_M in erster Näherung

Um weiteren Aufschluß zu gewinnen, haben wir die Ausdrücke l_{2r}^* und m_{2r+2}^* in Abhängigkeit von R bzw. r zu bestimmen. Gemäß (13) kommt das im wesentlichen auf die Berechnung der Determinanten $\Delta_{p,r+1}$ hinaus. Ersetzen wir die Summen $S_p(n)$ durch die Näherung (9₃), so gewinnen wir in der Entwicklung von $\Delta_{p,r+1}$ nach Potenzen von n

$$\Delta_{p,r+1} = \binom{r}{0} n^{r+1} + \binom{r}{1} n^r + \binom{r}{2} n^{r-1} + \dots \quad (16)$$

die ersten zwei Glieder.

In dieser Entwicklung ist der Faktor von n^{r+1} die (von n unabhängige) Determinante

$$\Delta_{p,r+1}^* = \begin{vmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+3} & \dots & \frac{1}{p+2r+1} \\ \frac{1}{p+3} & \frac{1}{p+5} & \dots & \frac{1}{p+2r+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \dots \quad (17)$$

und der Faktor von $\frac{1}{2} n^r$ wird eine Summe aus $(r+1)$ Determinanten,

$$\Sigma_{p,r+1}^* = \Delta_{p,r+1,0}^* + \Delta_{p,r+1,2}^* + \Delta_{p,r+1,4}^* + \dots + \Delta_{p,r+1,2r}^* \quad (18),$$

welche entstehen, indem man die Elemente der Spalten 0, 2, 4, ..., $2r$ von $\Delta_{p,r+1}^*$ durch die Werte 1 ersetzt. (16) erscheint also bei Berücksichtigung der beiden höchsten Glieder in der Form

$$\Delta_{p,r+1} = n^{r+1} \Delta_{p,r+1}^* + \frac{1}{2} n^r \Sigma_{p,r+1}^* \quad (19).$$

Wir wollen zunächst zwei Rekursionsformeln zur Berechnung von $\Delta_{p,r+1}^*$ herleiten. Behält man die Spalte $2r$ bei und subtrahiert ihre Elemente von denen der Spalten 0, 2, ..., $2r-2$, so läßt sich aus den Spalten 0, 2, 4, ..., $2r-2$ im Zähler der Faktor $2r, 2(r-1), 2(r-2), \dots, 2 \cdot 1$ und aus den Zeilen 0, 2, ..., $2r$ im Nenner der Faktor $(p+2r+1), (p+2r+3), \dots, (p+4r+1)$ herausziehen.

Läßt man dann die Zeile $2r$ ungeändert und subtrahiert ihre Elemente von denen der Zeilen 0, 2, ..., $2r-2$, so erscheinen in der letzten Spalte mit Ausnahme des letzten unveränderten Elements 1 lauter Nullen. Die Determinante vereinfacht sich demnach, wenn man noch ähnlich wie eben alle gemeinsamen Faktoren herauszieht, zu

$$\Delta_{p,r+1}^* = \frac{(2^r r!)^2}{(p+2r+1)^2 (p+2r+3)^2 \dots (p+4r-1)^2 (p+4r+1)^2} \Delta_{p,r}^* \quad (20_1).$$

Mit der vorstehenden Rechnung haben wir in der Ausgangsdeterminante $\Delta_{p,r+1}^*$ sowohl die Spalte $2r$ als auch die Zeile $2r$ „ausgelöscht“. Man kann nun aus den Spalten 0, 2, ..., $2r$ irgendeine, z. B. 2α und aus den Zeilen 0, 2, ..., $2r$ irgendeine andere, z. B. 2β , auswählen und diese durch den gleichen Rechengang, wie er eben ausführlich erläutert wurde, „zum Verschwinden bringen“. Dann entstehen Rekursionsformeln anderer Gestalt, von denen wir die für $\alpha=0$ und $\beta=0$ noch hinschreiben wollen. Bringt man in der Ausgangsdeterminante $\Delta_{p,r+1}^*$ die Spalte 0 und die Zeile 0 zum Verschwinden, so gewinnt man die Beziehung

$$\Delta_{p,r+1}^* = \frac{(2^r r!)^2}{(p+1)^2 (p+3)^2 (p+5)^2 \dots (p+2r+1)^2} \Delta_{p+4,r}^* \quad (20_2),$$

die für $p=0$ im Hinblick auf (13) nützlich ist.

Nach (13) und (19) gilt in erster Näherung für genügend große Punktzahlen, d. h. bei Beschränkung auf die höchsten Potenzen von n ,

$$l_{2r}^* \approx n \frac{n^r \Delta_{p,r}^*}{n^{r+1} \Delta_{0,r+1}^*} = l_{2r}^{*2} \quad (21_1)$$

und

$$m_{2r+2}^* \approx \frac{n^{r+1} \Delta_{p,r+1}^*}{n^{r+1} \Delta_{0,r+1}^*} = m_{2r+2}^* \quad (21_2).$$

Formt man diese Ausdrücke mit Hilfe der Rekursionsformeln (20₂) und (20₁) um, so erhält man schließlich die von n unabhängigen Grenzwerte.

$$l_{2r}^* = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r}, \quad r \geq 1 \quad \dots \dots \dots (21_3),$$

und

$$m_{2r+2}^* = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r+1)}{(2r+3)(2r+5) \cdots (4r+3)} \quad \dots \dots \dots (21_4).$$

Setzt man diese Werte schließlich in (14₂) und (15₂) ein, so hat man die Fehler $f_P(R; N)$ und $f_M(R; N)$ in erster Näherung berechnet.

Für die Gewichte λ_ν folgt aus (3) in Verbindung mit (10₁) und (19) in erster Näherung

$$2n \lambda_\nu \approx \frac{1}{\Delta_{0,r+1}^*} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{2r+1} \\ \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{2r+3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2r} & \frac{1}{2r+3} & \cdots & \frac{1}{4r+1} \end{vmatrix}.$$

Der Nenner $\Delta_{0,r+1}^*$ läßt sich in der Form

$$\Delta_{0,r+1}^* = \frac{(2^r r!)^2}{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)} \left\{ \frac{(r-\varrho)! \varrho!}{r!} \frac{1}{(3+2\varrho) \cdots (2r+1+2\varrho)} A_{2\varrho} \right\} \\ \varrho = 0; 1; 2; \dots; r,$$

darstellen, wobei $A_{2\varrho}$ die im Zähler und Nenner gemeinsamen Unterdeterminanten der ersten Spalte sind. Die erste dieser Gleichungen für $\varrho=0$ stimmt mit (20₂) überein, wenn man dort $p=0$ setzt. Entwickelt man nun den Zähler nach Potenzen von $(\nu/n)^{2\varrho}$, so findet man schließlich mit Rücksicht auf die letzten Gleichungen als asymptotisches Gesetz der Gewichtsverteilung

$$(2n \lambda_\nu)_\infty = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r+1)}{(2^r r!)^2} \sum_{\varrho=0}^r (-1)^\varrho (3+2\varrho) \cdots (2r+1+2\varrho) \binom{r}{\varrho} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2\varrho}. \quad (21_5).$$

5. Berechnung von f_P und f_M in zweiter Näherung

Daß die Gleichungen des vorausgehenden Abschnitts für sehr große Punktzahlen n die wirklichen Verhältnisse gut wiedergeben, steht außer Zweifel. Um sie jedoch auch bei praktisch vorkommenden „kleineren“ Werten von n nutzbar zu machen, wollen wir im folgenden die zweite Näherung noch herleiten. Dazu müssen wir in der Entwicklung (19) den Faktor $\Sigma_{p,r+1}^*$ von $\frac{1}{2} n^r$ berechnen. Die Determinante $\Delta_{p,r+1}^*$ läßt sich umgestalten zu

$$\Delta_{p,r+1}^* = (-1)^{r-\varrho} \frac{2^r (r-\varrho)! \varrho!}{(p+1+2\varrho) \cdots (p+1+2\varrho+2r)} \Delta_{p,r+1,2\varrho}^*, \\ \varrho = 0; 1; 2; \dots; r.$$

Man findet diese Gleichungen, wenn man die vor (20₁) nur mit der Spalte $2r$ durchgeführte Rechnung der Reihe nach mit den Spalten $0, 2, 4, \dots, 2r$ durchführt. Bildet man nun mit Hilfe der letzten Gleichungen die Summe (18), so kommt

$$\Sigma_{p,r+1}^* = \frac{1}{2^r r!} \Delta_{p,r+1}^* \left\{ \sum_{\varrho=0}^r (-1)^{r-\varrho} \underbrace{(p+1+2\varrho) \cdots (p+1+2r+2\varrho)}_{P_{p,r+1,\varrho}} \binom{r}{\varrho} \right\}_{p,r+1}$$

Die in der geschweiften Klammer $\{\}_{p,r+1}$ enthaltene $(r+1)$ -gliedrige Summe läßt sich vereinfachen, wenn man die Binomialfaktoren $\binom{r}{\varrho}$ gemäß der Beziehung $\binom{r}{\varrho} = \binom{r-1}{\varrho} + \binom{r-1}{\varrho-1}$ aufspaltet. Dann erscheint $\{\}_{p,r+1}$ wegen $\binom{r}{0} = \binom{r-1}{0} = 1$ und $\binom{r}{r} = \binom{r-1}{r-1} = 1$ zunächst in der Gestalt

$$\{\}_{p,r+1} = \sum_{\varrho=0}^{r-1} (-1)^{r-\varrho} \binom{r-1}{\varrho} P_{p,r+1,\varrho} + \sum_{\varrho=1}^r (-1)^{r-\varrho} \binom{r-1}{\varrho-1} P_{p,r+1,\varrho},$$

oder, indem man in der zweiten Summe ϱ durch $\varrho+1$ ersetzt und zusammenfaßt

$$\{\}_{p,r+1} = \sum_{\varrho=0}^{r-1} (-1)^{r-\varrho-1} \binom{r-1}{\varrho} [P_{p,r+1,\varrho+1} - P_{p,r+1,\varrho}].$$

Nun ist

$$P_{p,r+1,e+1} - P_{p,r+1,e} = (p+3+2e) \cdots (p+1+2r+2e) 2(r+1) = 2(r+1) P_{p+2,r,e}.$$

Damit erhält $\{ \}_{p,r+1}$ schließlich die Form

$$\{ \}_{p,r+1} = 2(r+1) \left\{ \sum_{e=0}^{r-1} (-1)^{(r-1)-e} P_{p+2,r,e} \binom{r-1}{e} \right\} = 2(r+1) \{ \}_{p+2,r}.$$

Wir haben also eine Rekursionsformel zur Berechnung von $\{ \}_{p,r+1}$ gewonnen, die nach r Schritten den Wert

$$\{ \}_{p,r+1} = 2^r (r+1)! (p+2r+1)$$

liefert. Die gesuchte Summe wird infolgedessen

$$\Sigma_{p,r+1}^* = (r+1) (p+2r+1) \Delta_{p,r+1}^* \dots \dots \dots (22).$$

Für die Determinante $\Delta_{p,r+1}$ finden wir demnach aus (19) als Anfang der Entwicklung nach Potenzen von n

$$\Delta_{p,r+1} = \frac{1}{2} n^r \Delta_{p,r+1}^* \left[2n + (r+1)(p+2r+1) + \left(\frac{1}{n} + \dots \right) \right] \dots \dots (23).$$

Bilden wir damit die Ausdrücke l_{2r}^2 und m_{2r+2} gemäß (13), so kommt mit (21₁) und (21₂) in zweiter Näherung

$$l_{2r}^2(n) \approx \frac{2n + r(2r+3)}{2n + (r+1)(2r+1)} l_{2r}^{2*} = \left(1 - \frac{1}{2n} + \dots \right) l_{2r}^{2*} \dots \dots \dots (24_1)$$

und

$$m_{2r+2}(n) \approx \frac{2n + (r+1)(2r+3)}{2n + (r+1)(2r+1)} m_{2r+2}^* = \left(1 + \frac{r+1}{n} + \dots \right) m_{2r+2}^* \dots \dots (24_2).$$

Setzt man l_{2r} aus (24₁) in (14₁) ein, so erhält man

$$f_P(R; N) = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n} \right) \left(1 - \frac{1}{2n} + \dots \right) l_{2r}^{2*}}.$$

Da sich die Glieder mit n^{-1} aus der Entwicklung herausheben, so bleibt mit (21₂) in zweiter Näherung unverändert gegen (14₂) als Gesetz der Fehlerfortpflanzung

$$f_P(R; N) \approx \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r} \frac{\mu}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (25).$$

Aus (15₁) und (24₂) erhält man in Verbindung mit (21₄) für die Fälschung f_M in zweiter Näherung „mit einem von r und n abhängigen Verbesserungsfaktor“ gegen (15₂)

$$f_M(R; N) \approx (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)}{(2r+3)(2r+5) \cdots (4r+3)} \left(1 + \frac{r+1}{n} \right) \frac{1}{(2r+2)!} x_k^{(2r+2)} (n\tau)^{2r+2} \quad (26).$$

Die Gl. (25) und (26) gelten für $R=2r$ und $R=2r+1$, $r \geq 0$. Im Falle $r=0$ ist das nur von r abhängige Produkt in (25) „leer“, d. h. es hat den Wert 1.

6. Der Gültigkeitsbereich der zweiten Näherung

Die im vorausgehenden Abschnitt entwickelten Fehlerformeln beruhen im großen und ganzen auf der Näherung (9₃) für die Summen S_p . Die Vernachlässigung wirkt sich am ungünstigsten bei der in der Determinante $D_{2,r+1}$ auftretenden höchsten Summe

$$S_{4r+2} = 2n^{4r+2} \left[\frac{n}{4r+3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \frac{4r+2}{n} + \dots \right]$$

aus. Wählt man bei vorgegebener fester Ordnung $R=2r \geq 2$ der Ausgleichfunktion die Punktzahl $n \geq 4r+3$, so liegt der relative Fehler von S_{4r+2} unter 5,6%. Da alle anderen Summen in den maßgebenden Determinanten besser angenähert werden, so darf man für

$$n \gtrsim 4r+3 \quad \dots \dots \dots (27)$$

bereits ein brauchbares Ergebnis erwarten. Tatsächlich ist z. B. für $r=1$ und $n=7$ der Faktor für die Fehlerfortpflanzung genau $L_2(7) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot 1,004$, während die zweite Näherung (25) den Wert $L_2(7) \approx \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{15}}$ liefert. Die Unterschiede sind also völlig belanglos. Bei dem Faktor

$m_4(n)$ für die Fälschung der Funktion sind die Abweichungen etwas größer, wie aus Bild 1 anschaulich hervorgeht. Die Kreispunkte entsprechen den genauen Werten⁸⁾

$$m_4(n) = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 7} \frac{1}{n^2} (n+1)(n^2+n-2),$$

während die obere Kurve zu den Näherungswerten (26)

$$m_4(n) \approx \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 7} \left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

gehört. An der in (27) festgesetzten Gültigkeitsgrenze $n=7$ ist der relative Fehler $\Delta m_4/m_4 \approx 1/n^2$ etwa 2%. Da es sich bei der Verwendung der Fehlerformeln jedoch stets nur um eine Abschätzung des physikalischen und mathematischen Fehlers handeln kann, so sind auch größere Unterschiede zwischen strenger und angenäherter Lösung zulässig. Es hat vom praktischen Gesichtspunkt aus keinen Wert, die Genauigkeit bei der Berechnung der Zahlenfaktoren $l_{2r}(n)$ und $m_{2r+2}(n)$ zu weit zu treiben, weil sowohl die Beträge der Ausgangsfehler μ als auch die Ableitungen $x^{(2r+2)}$ der Erfahrungsfunktion oft nur der Größenordnung nach bekannt oder berechenbar sind.

Beim geradlinigen Ausgleichen ($r=0$) hat man einfach den Mittelwert

$$\bar{x}_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{v=-n}^{+n} x_{k+v} \quad (28_1)$$

zu bilden und erreicht damit den günstigsten physikalischen Fehler für \bar{x}_k

$$f_P(0; N) = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \quad (28_2)$$

Das Fehlerverhältnis $f_P(R; N)/f_P(0; N) = l_{2r}^*$ ist in Abhängigkeit von der Ordnung R der Ausgleichsfunktion in Bild 2 dargestellt. Bemerkenswert ist dabei folgender Zusammenhang. Bezeichnet man die zum Erreichen eines vorgeschriebenen Fehlers $f_P(R; N) = \text{konst}$ notwendige Punktzahl N mit N_0 , wenn linear ausgeglichen wird, und mit N_R bei Verwendung einer Potenzreihe vom Grade $R=2r$ (oder $R=2r+1$), so gilt

$$\frac{N_R}{N_0} = l_{2r}^{*2} \quad (29_1)$$

Es ist z. B. $N_0 = K^2$, falls $f_P(R; N) = \text{konst} = (1/K)\mu$ betragen soll. Bildet man nun den Differenzenquotienten der Funktion N_R/N_0 , so erhält man mit $\Delta r = 2$

$$\frac{\Delta(N_R/N_0)}{\Delta r} = \frac{\Delta l_{2r}^{*2}}{\Delta r} = \frac{1}{2} [l_{2r}^{*2} - l_{2r-2}^{*2}] = \frac{1}{2} l_{2r-2}^{*2} \left[\left(\frac{2r+1}{2r} \right)^2 - 1 \right].$$

Mit (21₃) läßt sich das in der Gestalt

$$\frac{\Delta(N_R/N_0)}{\Delta r} = \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \right) \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \right) \cdots \left(\frac{2r-3}{2r-2} \cdot \frac{2r-1}{2r-2} \right) \right] \frac{2r-1}{2r} \cdot \frac{4r+1}{4r}$$

schreiben. Da der Ausdruck in [] die Wallissche Produktzerlegung für $2/\pi$ ist⁹⁾, so strebt der Differenzenquotient mit wachsendem r gegen den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Delta(N_R/N_0)}{\Delta r} = \frac{2}{\pi} = 0,637 \quad (29_2)$$

⁸⁾ Stange, a. a. O., S. 394, Gl. (28).

⁹⁾ R. Courant, Differential- und Integralrechnung, Bd. 1, S. 181. Berlin 1927.

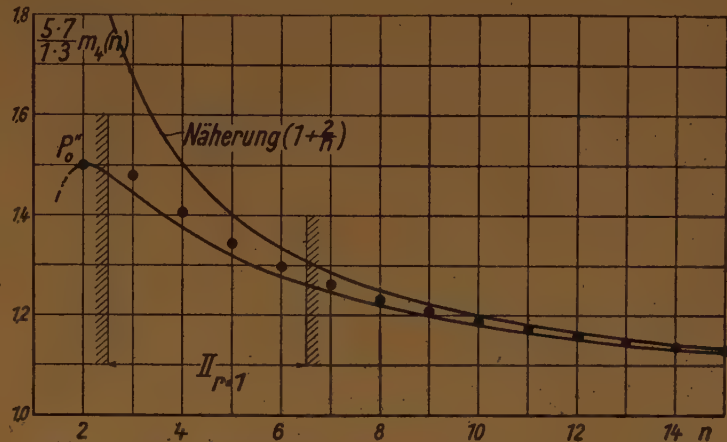


Bild 1. Der beim Ausgleichen mit einer Parabel $r=1$ (bzw. $R=2$ und 3) entstehende mathematische Fehler $f_M(2, N) = -(1/4!) x_k^{(4)}(n\tau)^4 m_4(n)$ ist bei fester Bereichlänge $n\tau = \text{konst}$ verhältnismäßig zu $m_4(n)$. Die Punkte geben $m_4(n)$ nach der genauen Rechnung; die obere Kurve ist das Ergebnis der asymptotischen Rechnung für „große“ Punktzahlen n . Die untere Kurve entspricht einer mit Hilfe der Grenzformel (P_0') berechneten Näherung für das „Zwischengebiet“ II. (Vgl. den Wortlaut zu Bild 4 und 6.)

Die Beziehung

$$\frac{\Delta(N_R/N_0)}{\Delta r} \approx 0,637$$

ist aber schon von Anfang an recht gut erfüllt, wie die Fälle $r=1$ und $r=2$ zeigen. Es ist nämlich

$$\frac{\Delta(N_3/N_0)}{\Delta r} = 0,625 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta(N_4/N_0)}{\Delta r} = 0,633.$$

Daraus folgt, daß die zum Erreichen eines vorgeschriebenen Fehlers $f_P(R)$ notwendige Punktzahl N_R (nahezu) linear mit der Ordnung R der Ausgleichfunktion anwächst. Es ist mit sehr guter Näherung anfangs

$$N_R \approx N_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} R\right) \dots \dots \dots (29_2),$$

was in Bild 2 anschaulich zum Ausdruck kommt, und später wegen (29₁)

$$N_R \approx N_0 \frac{2}{\pi} (R+1) \dots \dots \dots (29_3).$$

7. Die Fehlergesetze für die Ableitung \bar{x} .

Die Ableitung an der Stelle $x = x_k$ wird nach (1)

$$\bar{x}_k' = \frac{1}{\tau} a_1 \dots \dots \dots (30_1),$$

wobei der Faktor

$$a_1 = \sum_{v=-n}^{+n} \lambda_v' x_{k+v} \dots \dots \dots (30_2)$$

ein gewogenes Mittel aus den Ausgangswerten x_{k-n}, \dots, x_{k+n} ist, welches mit Hilfe der Einflußzahlen

$$\lambda_v' = \frac{v}{D_{2,r}} \begin{vmatrix} 1 & S_4 & \dots & S_{2r} \\ v^2 & S_8 & \dots & S_{2r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{2r} & S_{2r+2} & \dots & S_{4r-2} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (30_3)$$

gebildet werden muß.

Die für die Fehlerfortpflanzung

$$f_P'(R; N) = \frac{\mu}{\tau} L_{2r}' \dots \dots \dots (31)$$

maßgebende Summe $L_{2r}' = \sum_{v=-n}^{+n} \lambda_v'^2$ der Gewichtsquadrate läßt sich nach einer ähnlichen Rechnung wie vor Gl. (8) in der Form

$$L_{2r}' = \frac{D_{6,r-1}}{D_{2,r}} = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda_v'}{v} \right) \dots \dots \dots (32_1)$$

darstellen. Das für den mathematischen Fehler der Ableitung \bar{x}_k' ,

$$f_M'(R; N) = \frac{1}{(2r+1)!} x_k^{(2r+1)} \tau^{2r} M_{2r+1}' \dots \dots \dots (33)$$

maßgebende nichtverschwindende Moment M_{2r+1}' der Einflußzahlen ist

$$M_{2r+1}' = (-1)^{r-1} \frac{D_{4,r}}{D_{2,r}} \dots \dots \dots (34_1).$$

Mit Hilfe der Formeln (10₁), (23) und (20₂) bzw. (20₁) findet man aus (32₁) und (34₁) zunächst

$$n^3 L_{2r}' = \frac{3}{2} \left[\frac{5 \cdot 7 \dots (2r+1)}{2^{r-1} (r-1)!} \right]^2 \frac{2n + (r-1)(2r+3)}{2n + r(2r+1)} \dots \dots \dots (32_2)$$

und

$$M'_{2r+1} = (-1)^{r-1} n^{2r} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2r+1)}{(2r+3)(2r+5) \cdots (4r+1)} \frac{2n+r(2r+3)}{2n+r(2r+1)} \cdots \quad (34_2).$$

Die Fehlerformeln (31) und (33) für die Ableitung \bar{x} werden infolgedessen, ebenso wie (25) und (26) in zweiter Näherung,

$$\left. \begin{aligned} f'_P(R; N) &\approx \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2r-2)} \frac{\sqrt{3}\mu}{\sqrt{N}} \frac{1}{(n\tau)} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \\ &\approx \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2r-2)} \frac{\sqrt{3}\mu}{\sqrt{N+2}} \frac{1}{(n\tau)} \end{aligned} \right\} \cdots \quad (35)$$

und

$$f'_M(R; N) \approx (-1)^{r-1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2r+1)}{(2r+3)(2r+5) \cdots (4r+1)} \left(1 + \frac{r}{n}\right) \frac{1}{(2r+1)!} x_k^{(2r+1)} (n\tau)^{2r}. \quad (36),$$

gültig für $R = 2r-1$ und $R = 2r$, $r \geq 1$.

Der günstigste mit geradlinigem Ausgleichen $r=1$ bzw. $R=1$ und $R=2$ erreichbare physikalische Fehler der Ableitung ist

$$f'_P(1; N) \approx \frac{\sqrt{3}\mu}{\sqrt{N+2}} \frac{1}{n\tau} \cdots \quad (37).$$

[In dem Falle ist das in (35) vorausgehende von r abhängige Produkt „leer“, d. h. es hat den Wert 1.] Gl. (35) läßt sich demnach auch in der Gestalt

$$\frac{f'_P(R; N)}{f'_P(1; N)} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2r-2)}; \quad r > 1 \cdots \quad (38)$$

schreiben. Mit steigender Ordnung R der Ausgleichfunktion wächst der physikalische Fehler f'_P der Ableitung monoton an. Er multipliziert sich beim Übergang von $R=2r-1$ bzw. $2r$ zu $R'=2r+1$ bzw. $2r+2$ mit dem von der Punktzahl N unabhängigen Faktor $(2r+3)/2r$. Der günstigste überhaupt erreichbare Fehler $f'_P(1; N)$ ist verhältnismäßig zum Fehler μ der Ausgangswerte und umgekehrt verhältnismäßig zur Wurzel aus der Gesamtpunktzahl und zur „Bereichlänge“ $B=n\tau$. Der mathematische Fehler f'_M hängt bei fester Ordnung der Ausgleichfunktion im wesentlichen nur von der „Bereichlänge“ B ab.

Die in der früheren Arbeit hergeleiteten Formeln für Fehlerfortpflanzung und Fälschung erkennt man leicht als Sonderfälle der allgemeinen Gleichungen (25), (26) und (35), (36).

8. Eine Eigenschaft der Binomialfaktoren

Für die weitere Untersuchung benötigt man eine Eigenschaft der Binomialfaktoren, die im folgenden bereitgestellt werden soll, damit später der Gedankengang nicht unterbrochen werden muß. Es gilt für ihre auf die Symmetrielinie bezogenen Momente¹⁰⁾ der Ordnung p

$$s_p(2n) = \sum_{v=-n}^{+n} v^p (-1)^v \binom{2n}{n+v} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle ungeraden Werte von } p; \\ \text{für die geraden Werte } p=0; 2; \\ \dots (2n-2); \end{array} \right\} \cdots \quad (39_1)$$

und für $p=2n$

$$s_{2n}(2n) = \sum_{v=-n}^{+n} v^{2n} (-1)^v \binom{2n}{n+v} = (-1)^n (2n)! \cdots \quad (39_2).$$

Die Momente s_p der mit abwechselnden Vorzeichen versehenen Binomialfaktoren $\binom{2n}{n+v}$ verschwinden bei gerader Ordnung p , solange $0 \leq p \leq 2(n-1)$ ist. Das erste nicht verschwindende Moment ist $s_{2n}(2n)$.

Es ist selbstverständlich, daß mit s_p auch jede lineare Funktion der Gestalt

$$c_0 s_0(2n) + c_2 s_2(2n) + \cdots + c_p s_p(2n) = 0 \cdots \quad (40)$$

ist, solange $p \leq 2n-2$ bleibt. Insbesondere ist aus dem Grunde

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n v^2 (-1)^v \binom{2n}{n+v} &= 0, & \sum_2^n v^2 [v^2 - 1] (-1)^v \binom{2n}{n+v} &= 0, \dots, \\ \sum_{n-1}^n v^2 [v^2 - 1] [v^2 - 4] \cdots [v^2 - (n-2)^2] (-1)^v \binom{2n}{n+v} &= 0, \end{aligned} \right\} \cdots \quad (41),$$

da sich jede dieser Gleichungen auf die Form (40) bringen läßt.

¹⁰⁾ Willers II, a. a. O., S. 168, Gl. (13).

Weiter brauchen wir im folgenden die Summe der Quadrate der Binomialfaktoren. Dafür gilt¹¹⁾

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m} \dots \dots \dots (42).$$

Setzt man insbesondere $m = 2n$, so wird nach einer einfachen Umformung

$$\sum_{\nu=-n}^{+n} \binom{2n}{n+\nu}^2 = \binom{2n}{n} \frac{(2n+1)(2n+3)\dots(4n-1)}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \dots \dots \dots (43).$$

9. Der geglättete Wert \bar{x}_k als Funktion der Differenzen Δ_k^{2p} gerader Ordnung

Die im Abschnitt 7 hergeleiteten Fehlergesetze gelten asymptotisch für „große“ Punktzahlen $n \gtrsim 4r+3$. Ist nun im Gegensatz dazu die Punktzahl n nur wenig größer als r , so besitzt die Ausgleichaufgabe, wie Willers für die drei Fälle $n=r+1$, $n=r+2$ und $n=r+3$ gezeigt hat, eine einfache Lösung. Wir wollen im folgenden insbesondere die für $n=r+1$ geltende „Grenzlösung“ benutzen, um „das unbekannte Gebiet“ zwischen $n=r+1$ und „großen“ Werten von n zu überbrücken. Dazu haben wir zunächst den Zusammenhang mit der von Willers gegebenen Lösung herzustellen.

Die Differenzen Δ_k^{2p} der nicht geglätteten Ausgangswerte x_k sind¹²⁾

$$\Delta_k^{2p} = \sum_{\nu=-p}^{+p} (-1)^{p+\nu} \binom{2p}{p+\nu} x_{k+\nu} \dots \dots \dots (44_1).$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung die Summe von zwei symmetrisch zu x_k gelegenen x -Werten mit $\xi_{k+\nu}$, also $\xi_{k+\nu} = x_{k-\nu} + x_{k+\nu}$ für $\nu = 1; 2; \dots n$, und setzen $\xi_k = x_k$, so werden die Differenzen

$$\Delta_k^{2p} = \sum_{\nu=0}^p (-1)^{p+\nu} \binom{2p}{p+\nu} \xi_{k+\nu} \dots \dots \dots (44_2).$$

Andererseits ist der geglättete Wert \bar{x}_k wegen $\lambda_\nu = \lambda_{-\nu}$

$$\bar{x}_k = \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu \xi_{k+\nu} \dots \dots \dots (45)$$

Schreibt man (44₂) der Reihe nach für $p = 0, 1, \dots n$ auf, so erhält man $(n+1)$ -Gleichungen, welche die $(n+1)$ -Differenzen gerader Ordnung $\Delta_k^0, \dots, \Delta_k^{2n}$ der Zeile k mit den $(n+1)$ „Funktionswerten“ ξ_k, \dots, ξ_{k+n} verknüpfen. Löst man dieses System nach den „Unbekannten“ $\xi_{k+\nu}$ auf, so findet man die $\xi_{k+\nu}$ als lineare Funktionen der Differenzen $\Delta_k^0, \Delta_k^2, \dots, \Delta_k^{2p}$,

$$\xi_{k+\nu} = a_\nu^{(0)} \Delta_k^0 + a_\nu^{(2)} \Delta_k^2 + \dots + a_\nu^{(2p)} \Delta_k^{2p}; \quad \nu = 0; 1; \dots n \dots \dots \dots (46).$$

Setzt man diese Ausdrücke schließlich in (45) ein, so wird auch der ausgeglichene Wert \bar{x}_k linear durch die Differenzen gerader Ordnung dargestellt,

$$\bar{x}_k = b_0 \Delta_k^0 + b_2 \Delta_k^2 + \dots + b_{2n} \Delta_k^{2n} \dots \dots \dots (47).$$

Wir wollen nun die Faktoren b_0, \dots, b_{2n} dieser Entwicklung wirklich berechnen. Die Auflösung des Systems (44₂) nach den $\xi_{k+\nu}$ schreiben wir in der Form

$$\xi_{k+\nu} = 2 \Delta_k^0 + \nu \left\{ \binom{\nu}{\nu-1} \Delta_k^2 + \frac{1}{2} \binom{\nu+1}{\nu-2} \Delta_k^4 + \frac{1}{3} \binom{\nu+2}{\nu-3} \Delta_k^6 + \dots + \frac{1}{p} \binom{\nu+p-1}{\nu-p} \Delta_k^{2p} + \dots + \frac{1}{\nu} \binom{2\nu-1}{0} \Delta_k^{2\nu} \right\} \dots \dots (48).$$

Für $\nu=1$ ist die Lösung offenbar richtig. Daß sie allgemein gilt, läßt sich durch den Schluß von n auf $(n+1)$ zeigen, wobei man den Faktor $a_\nu^{(2p)}$ in der Entwicklung (46) zweckmäßig in der Gestalt

$$a_\nu^{(2p)} = \frac{\nu}{p} \binom{\nu+p-1}{\nu-p} = \frac{2}{(2p)!} \nu^2 [\nu^2 - 1] [\nu^2 - 4] \dots [\nu^2 - (p-1)^2] \dots \dots (49)$$

schreibt. Die zum Beweise von (48) notwendige längere Rechnung soll hier jedoch unterdrückt werden.

¹¹⁾ Willers II, a. a. O., S. 171, Gl. (30).

¹²⁾ Willers I, a. a. O., S. 72, Gl. (6).

Setzen wir nun die Ausdrücke (48) in (45) ein, so wird der ausgeglichene Wert

$$\bar{x}_k = \lambda_0 \Delta_k^0 + \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \left\{ 2 \Delta_k^0 + \sum_{p=1}^{\nu} \alpha_{\nu}^{(2p)} \Delta_k^{2p} \right\} = \Delta_k^0 \left\{ \lambda_0 + 2 \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \right\} + \sum_{p=1}^n \Delta_k^{2p} \left\{ \sum_{\nu=p}^n \alpha_{\nu}^{(2p)} \lambda_\nu \right\},$$

oder mit (49) ausführlich aufgeschrieben

$$\bar{x}_k = \Delta_k^0 \left\{ \lambda_0 + 2 \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \right\} + \Delta_k^2 \left\{ \frac{2}{2!} \sum_{\nu=2}^n \nu^2 \lambda_\nu \right\} + \Delta_k^4 \left\{ \frac{2}{4!} \sum_{\nu=2}^n \nu^2 (\nu^2 - 1) \lambda_\nu \right\} + \dots + \left\{ \begin{array}{l} + \Delta_k^{2n} \left\{ \frac{2}{(2n)!} \sum_{\nu=n}^n \nu^2 [\nu^2 - 1] [\nu^2 - 4] \dots [\nu^2 - (n-1)^2] \lambda_\nu \right\} \end{array} \right\} \quad (50).$$

Der Faktor von $\Delta_k^0 = \xi_k = x_k$ hat den Wert $\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu = 1$. Bei Verwendung einer Ausgleichfunktion vom Grade $R=2r$ (bzw. $R=2r+1$) verschwinden die Momente $M_\alpha = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^\alpha \lambda_\nu$ der Gewichte λ_ν u. a. für alle geraden Werte von α zwischen 2 und $2r$, einschließlich der Grenzen¹³⁾. Infolgedessen haben die Faktoren von $\Delta_k^2, \dots, \Delta_k^{2r}$ den Wert Null, da sie als lineare Funktionen dieser Momente darstellbar sind. Die erste in der Entwicklung (50) wirklich auftretende Differenz ist demnach Δ_k^{2r+2} . Es wird also aus (47)

$$\bar{x}_k = x_k + b_{2r+2} \Delta_k^{2r+2} + \dots + b_{2n} \Delta_k^{2n} \quad (51)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} b_{2r+2} = \frac{2}{(2r+2)!} \sum_{\nu=r+1}^n \nu^2 [\nu^2 - 1^2] [\nu^2 - 2^2] \dots [\nu^2 - r^2] \lambda_\nu = \sum_{\nu=r+1}^n \frac{\nu}{r+1} \binom{\nu+r}{\nu-r-1} \lambda_\nu \\ \vdots \\ b_{2n} = \lambda_n \end{array} \right\} \quad (52).$$

Durch diese Beziehung ist die am Ausgangswert x_k anzubringende Verbesserung $\overline{\Delta x_k} = \bar{x}_k - x_k$ in einfacher Weise durch die Differenzen gerader Ordnung Δ_k^{2p} , $r+1 \leq p \leq n$, der ungeglätteten Funktionswerte x_{k-n}, \dots, x_{k+n} dargestellt. Wir sind damit auf andere Weise zu dem bereits von Willers gefundenen Ergebnis gelangt. Die Beziehung (51) ist einesteils enger als bei W., da der Satz dort nicht nur für die „mittlere“ Ordinate \bar{x}_k sondern (in etwas allgemeinerer Fassung) auch noch für die „Randordinaten“ $x_{k+\nu}$ bewiesen wird. Auf der anderen Seite ist die Beziehung (52), welche die Faktoren b_{2p} mit den Gewichten λ_ν verknüpft, hier allgemeiner, da sich W. bei der Berechnung der Faktoren auf die eingangs genannten drei Fälle $n=r+1$, $r+2$ und $r+3$ beschränkt.

10. Die Grenzlösung für zwei überzählige Punkte; $n=r+1$ bzw. $N=R+3$

Wählt man beim Ausgleichen die Punktzahl $n=r+1$, so vereinfacht sich die Entwicklung (51) zu

$$\bar{x}_k = x_k + \lambda_{r+1} \Delta_k^{2r+2} \dots \dots \dots (53),$$

sie enthält also nur noch eine einzige Differenz. In diesem besonderen Falle gilt:

für die Gewichte λ_ν

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\nu=1}^{r+1} \lambda_\nu = -\frac{1}{2} (\lambda_0 - 1) \\ \sum_{\nu=1}^{r+1} \nu^2 \lambda_\nu = 0 \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{r+1} \nu^{2r} \lambda_\nu = 0 \end{array} \right\}$$

und

$$2 \sum_{\nu=1}^{r+1} \nu^{2r+2} \lambda_\nu = M_{2r+2}$$

für die Binomialfaktoren gemäß (39₁) und (39₂)

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{2r+2}{r+1+\nu} = -\frac{1}{2} \binom{r+1}{2r+2} \dots (54_1), \\ \sum_{\nu=1}^{r+1} \nu^2 (-1)^\nu \binom{2r+2}{r+1+\nu} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{r+1} \nu^{2r} (-1)^\nu \binom{2r+2}{r+1+\nu} = 0 \end{array} \right\} \dots (54_2),$$

$$2 \sum_{\nu=1}^{r+1} \nu^{2r+2} (-1)^\nu \binom{2r+2}{r+1+\nu} = (-1)^{r+1} (2r+2)! \dots (54_3)$$

¹³⁾ Stange, a. a. O., S. 387, Gl. (11₆).

Vergleicht man die r Gleichungen (54₂) miteinander, welche in λ_ν bzw. $(-1)^\nu \binom{2r+2}{r+1+\nu}$ linear und homogen sind, so folgt aus der Übereinstimmung ihrer Koeffizienten

$$\lambda_\nu = c(-1)^\nu \binom{2r+2}{r+1+\nu}, \quad \nu = 1; 2; \dots; (r+1) \quad (55_1).$$

Im Sonderfall der Grenzlösung sind die Gewichte λ_ν (abgesehen vom Vorzeichen) den Binomialfaktoren $\binom{2r+2}{r+1+\nu}$ verhältnismäßig. Mit (55₁) folgt weiter aus dem ersten und letzten Gleichungspaar (54₁) und (54₃)

$$\lambda_0 - 1 = c \binom{2r+2}{r+1} \quad (55_2)$$

und

$$M_{2r+2} = c(-1)^{r+1} (2r+2)! = \lambda_{r+1} (2r+2)! \quad (55_3).$$

Der mathematische Fehler f_M wird infolgedessen gemäß (7₁) bei zwei überzähligen Punkten

$$f_M(R; R+3) \approx \lambda_{r+1} x_{k*}^{2r+2} \tau^{2r+2} \approx \lambda_{r+1} \Delta_{k*}^{2r+2} \quad (56),$$

wobei Δ_{k*}^{2r+2} die Differenz der (im allgemeinen nicht bekannten) meßfehlerfreien x -Werte bedeutet. Vergleicht man (56) und (53), so sieht man, daß die Herabsetzung der Streuung der x -Werte mit Hilfe von (53) ganz auf Kosten der Fälschung f_M geht. Die letzte Gleichung ist auch anschaulich unmittelbar einleuchtend. Wendet man nämlich das Ausgleichsverfahren (53) auf meßfehlerfreie Werte x_{k*} an, so besteht der Erfolg nur in einer Fälschung dieser Werte um den Betrag $\bar{x}_{k*} - x_{k*} = \lambda_{r+1} \Delta_{k*}^{2r+2}$. Diese Fälschung kann nach dem „Ausgleichen“ mit Hilfe von (56) wieder vollständig rückgängig gemacht werden.

Zur Berechnung des noch unbekannten Faktors c setzen wir (55₁) und (55₂) in (8₁) ein. Dann kommt mit (43)

$$c = - \frac{\binom{2r+2}{r+1}}{\sum_{\nu=-(r+1)}^{r+1} \binom{2r+2}{r+1+\nu}^2} = - \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)}{(2r+3)(2r+5) \cdots (4r+3)} \quad (57).$$

Damit wird nun endgültig für die Grenzlösung der geglättete Wert¹⁴⁾

$$\bar{x}_k = x_k + (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)}{(2r+3)(2r+5) \cdots (4r+3)} \Delta_k^{2r+2} \quad (58_1),$$

der zugeordnete physikalische Fehler

$$f_P(R; R+3) = \sqrt{\lambda_0} \mu, \quad \text{mit } \lambda_0 = 1 - \frac{\binom{2r+2}{r+1}^2}{\binom{4r+4}{2r+2}} = 1 - \binom{2r+2}{r+1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)}{(2r+3) \cdots (4r+3)} \quad (58_2)$$

und der mathematische Fehler

$$f_M(R; R+3) = (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r+1)}{(2r+3)(2r+5) \cdots (4r+3)} \Delta_{k*}^{2r+2} \quad (58_3).$$

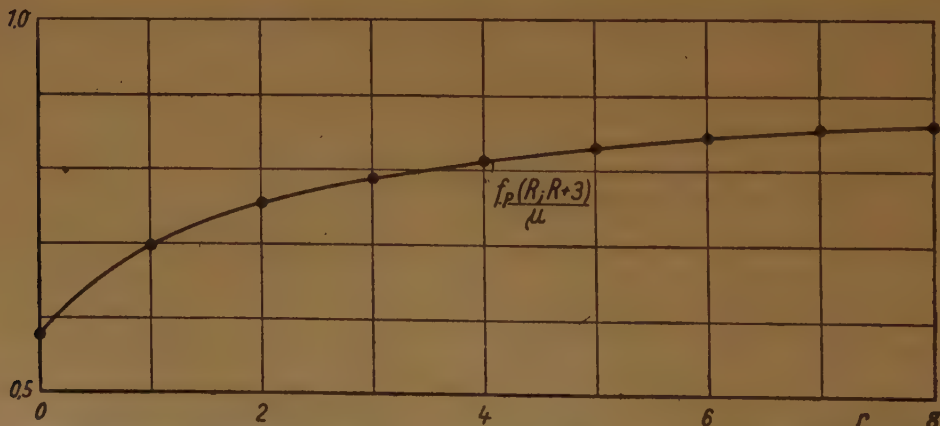


Bild 3. Verlauf des physikalischen Fehlers $f_P(R, R+3)$ im Grenzfall des Ausgleichens mit nur zwei „überzähligen“ Punkten in Abhängigkeit von der Ordnung $R = 2r$ der abschnittsweise benutzten Ersatzfunktion (Grenzlösung)

¹⁴⁾ Gleichung (58₁) erscheint bei Willers (II, S. 171 unten) in etwas anderer Gestalt.

Der Verlauf von $f_P(R; R+3)/\mu$ in Abhängigkeit von der Ordnung der Ausgleichfunktion ist aus Bild 3 ersichtlich und bestätigt noch einmal die bereits in der früheren Arbeit ausgesprochene Tatsache, daß das Ausgleichen mit Hilfe ganzer rationaler Funktionen höheren Grades nur dann die Streuung der Ausgangswerte merklich herabsetzt, wenn man „große“ Punktzahlen N wählt. Bei nur wenig überzähligen Punkten sind die Kurven „zu biegsam“ und passen sich infolgedessen dem Verlauf der fehlerhaften Punktreihe zu gut an.

Die bekannten Gleichungen¹⁵⁾

$$\bar{x}_k = x_k + \frac{1}{3} \Delta_k^2 \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}_k = x_k - \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 7} \Delta_k^4 \dots \dots \dots (58_1)$$

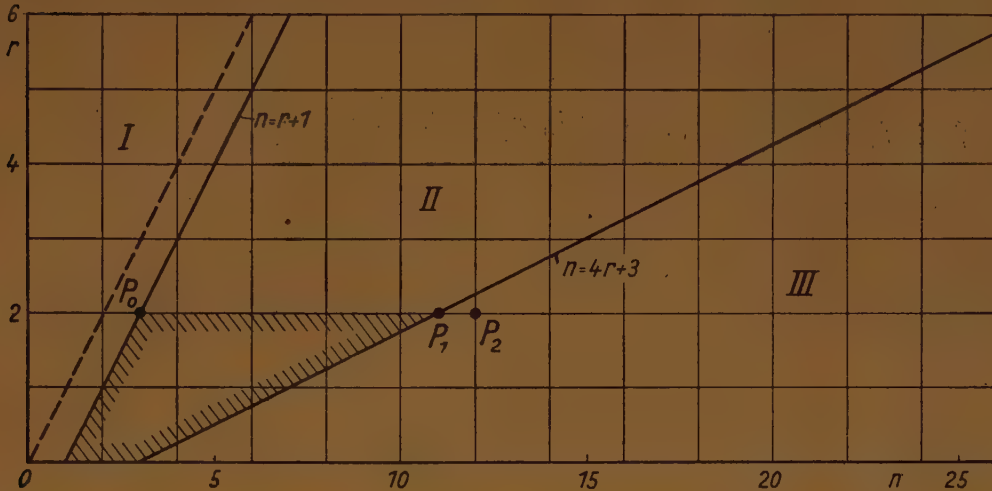


Bild 4. Aufteilung der (n, r) -Ebene in drei Teilbereiche I (Ausgleichaufgabe besitzt keine Lösung), II (Zwischengebiet) und III (Gültigkeitsbereich der asymptotischen Formeln für große n). Das „Zwischengebiet“ II kann mit Hilfe der bekannten Grenzlösung (P_0) für $n = r + 1$ und der asymptotischen Näherung (P_1) für $n = 4r + 3$ „überbrückt“ werden. Beispiele einer solchen Rechnung sind für den physikalischen Fehler $f_P(R, N)$ aus Bild 5 und für den mathematischen Fehler $f_M(R, N)$ aus Bild 6 und 1 ersichtlich

beim Glätten mit Hilfe einer Geraden ($r=0$; $R=0$) durch $N=3$, bzw. mit einer Parabel ($r=1$; $R=2$) durch $N=5$ Punkte erscheinen als die einfachsten Sonderfälle von (58₁).

Bei nur zwei überzähligen Meßpunkten nimmt die Lösung der Ausgleichaufgabe die einfache Form (58₁) bis (58₃) an. Es ist in dem Falle also nicht erforderlich, die wesentlich mühsamere Berechnung der Summen $S_p(n)$ und der aus ihnen gebildeten Determinanten $D_{p,r}$ durchzuführen.

Nach Bild 4 wird der erste Quadrant der n, r -Ebene durch die zwei Geraden $n=r+1$ und $n=4r+3$ in drei Bereiche I, II und III geteilt. Im Bereich I besitzt die Ausgleichaufgabe keine Lösung. Längs der gestrichelten Geraden $n=r$ entartet sie zur „Interpolation“, da in dem Falle die Zahl $N=2n+1=2r+1$ der Meßpunkte gerade hinreicht, die $(2r+1)$ Faktoren a_0, \dots, a_{2r} der „Ausgleichfunktion“ (1) so festzulegen, daß sie durch alle Punkte hindurchgeht. Längs der Geraden $n=r+1$ gilt die Grenzlösung (58₂) und (58₃), deren Verlauf für f_P aus Bild 3 ersichtlich ist. Im Bereich III gilt mit ausreichender Genauigkeit die Näherung (25) und (26). Im Zwischengebiet II ist man jedoch hinsichtlich der strengen Lösung auf die numerische Berechnung von Fall zu Fall angewiesen, die in der eingangs genannten Arbeit wenigstens für das praktisch wichtige Teilgebiet durchgeführt wurde, welches in Bild 4 geschrafft dargestellt ist.

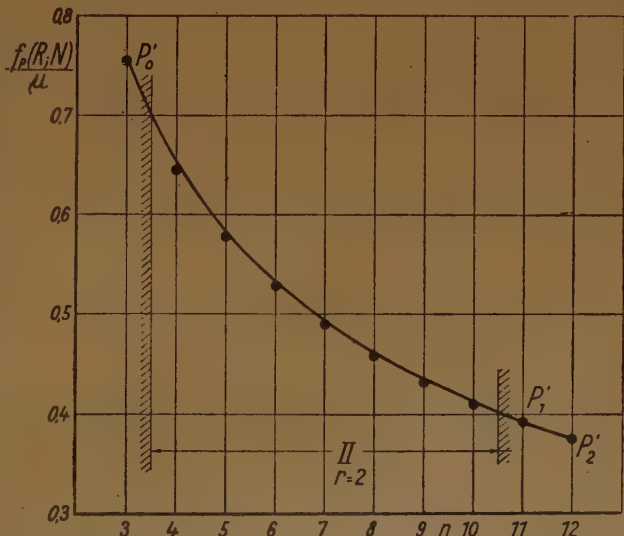


Bild 5. Verlauf des physikalischen Fehlers $f_P(R, N)$ für $r=2$ (bzw. $R=4$ und 5) im Zwischengebiet II über der Punktzahl n . Die Kurve entspricht einer aus Grenzlösung (P'_0) und asymptotischer Lösung (P'_1) berechneten Näherung; die zum Vergleich eingetragenen Punkte sind das Ergebnis der strengen Rechnung. (Vgl. den Wortlaut zu Bild 4.)

¹⁵⁾ Willers I, a. a. O., S. 253, Gl. (14).

Kommt es nur auf eine Fehlerabschätzung an, so läßt sich das unbekannte Zwischengebiet II gemäß Bild 4 mit Hilfe der bekannten Grenzlösung P_0 und der asymptotischen Näherung P_1, P_2, \dots für große n überbrücken.

Gemäß (13) empfiehlt es sich, beim Zwischenschalten der unbekannten Funktionswerte f_P/μ an Stelle von (f_P/μ) die Ausgangswerte $(f_P/\mu)\sqrt{n}$ zu benutzen, weil diese Funktion nahezu gerade gestreckt ist. Bild 5 zeigt das Ergebnis einer solchen Rechnung. Die Kurve $(f_P/\mu)_{r=2}$ wurde aus den Punkten P'_0 der Grenzlösung und $(P'_1; P'_2)$ der asymptotischen Näherung bestimmt, wobei lineare Interpolation zwischen P'_0 und P'_1 genügt. Die Näherungswerte weichen im ganzen Bereich II nur so unwesentlich von den zum Vergleich genau berechneten Kreispunkten ab, daß die Unterschiede für praktische Zwecke völlig belanglos sind.

Um auch den mathematischen Fehler f_M im Zwischengebiet II abzuschätzen, ist es zweckmäßig, die zweite Näherung (26)

$$\frac{(2r+3)(2r+5)\cdots(4r+3)}{1\cdot 3\cdots(2r+1)} m_{2r+2}(n) \approx 1 + \frac{r+1}{n}$$

durch das Zusatzglied c_r/n^2 zu erweitern und c_r so zu bestimmen, daß die verbesserte zweite Näherung

$$\frac{(2r+3)(2r+5)\cdots(4r+3)}{1\cdot 3\cdots(2r+1)} m_{2r+2}(n) \approx 1 + \frac{r+1}{n} + \frac{c_r}{n^2}$$

an der Grenze $n=r+1$ mit der bekannten Lösung (58₃) übereinstimmt. Dann muß gemäß (26) und (58₃) gelten

$$2 + \frac{c_r}{(r+1)^2} = \frac{(2r+2)!}{(r+1)^{2r+2}} \quad \text{oder} \quad c_r = \frac{(2r+2)!}{(r+1)^{2r}} - 2(r+1)^2.$$

Diese Gleichung liefert für die einfachsten Fälle $r=1$ und $r=2$ die Werte $c_1=-2$ und $c_2=-\frac{82}{9} \approx -9$. Es ist also in besserer Näherung als (26)

$$f_M(2; N) \sim 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \quad \text{bzw.} \quad f_M(4; N) \approx 1 + \frac{3}{n} - \frac{9}{n^2}.$$

Der daraus berechnete Verlauf des mathematischen Fehlers f_M wird für $r=1$ in Bild 1 und für $r=2$ in Bild 6 jeweils durch die untere Kurve dargestellt. Diese Kurven passen sich dem wirk-

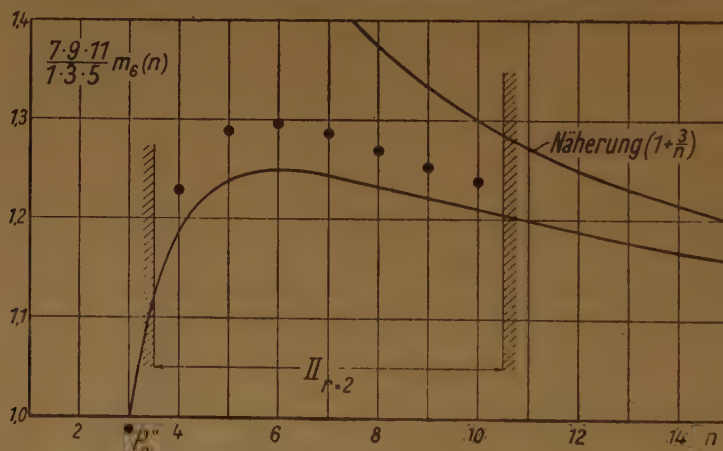


Bild 6. Zur Berechnung des mathematischen Fehlers $f_M(R, N) \sim m_{2r+2}(n)$ für $r=2$ (bzw. $R=4$ und 5) im Zwischengebiet II. Die obere Kurve entspricht der asymptotischen Lösung; die Punkte sind das Ergebnis der strengen Rechnung und die untere Kurve gehört zu der mit Hilfe der Grenzlösung (P'_0) berechneten Näherung für das Zwischengebiet II. (Vgl. den Wortlaut zu Bild 4.)

lichen Verläufe gut an, der durch die Kreispunkte veranschaulicht wird. Die Abweichungen zwischen der strengen Lösung und der mit Hilfe der Grenzlösung verbesserten zweiten Näherung überschreiten im ganzen Zwischengebiet II für $r=1$ (bzw. $r=2$) die Beträge 2,5% (bzw. 3,8%) nicht und fallen infolgedessen bei einer Abschätzung des mathematischen Fehlers gar nicht ins Gewicht.

Eingegangen: 13. 11. 1948.

Beitrag zur Entstehung von Wasserwellen durch Wind

Von Walter Wuest in Göttingen

Die Entstehung von Wasserwellen durch Wind wird auf eine Instabilität der ebenen Wasserfläche gegenüber kleinen Störungen zurückgeführt. Dabei werden laminare Grenzschichten in Wasser und Luft berücksichtigt und für die Grundströmung lineare und gekrümmte Geschwindigkeitsprofile zugrundegelegt. Die Rechnung ergibt einen wesentlichen Einfluß der Luftgrenzschicht und die Wellenlänge der zuerst gebildeten Wellen hängt von der Grenzschichtdicke ab.

The formation of water waves due to the action of wind is deduced from the instability of the plane water surface under the influence of small disturbances. The computation considers laminar boundary layers in water and air with linear and nonlinear velocity profiles of the base current. It results that the problem is especially influenced by the boundary layer in the air, and the length of the initial waves depends on the thickness of the boundary layer.

La formation d'ondes sur l'eau par l'action du vent est déduite de l'instabilité de la surface d'eau initialement plane sous l'influence de petites perturbations. La calculacion comprend des couches limites laminares et quant au courant de base, des profils de vitesse linéaires et nonlinéaires. Il résulte que la couche limite de l'air influence beaucoup le problème, et la longueur des ondes initiales dépend de l'épaisseur de la couche limite.

Показывается, что возникновение водяных волн при ветре можно приписать неустойчивости гладкой водяной поверхности по отношению к маленьким помехам. Учитываются ламинарные пограничные слои воды и воздуха; принимается в расчет прямолинейный и криволинейный профиль скоростей основного течения. Из расчета следует, что влияние пограничного слоя воздуха значительно; длина возникающих волн зависит от толщины пограничного слоя.

§ 1. Beobachtungen und Windkanalversuche.

Wenn die Luft gleichmäßig über eine ebene Wasserfläche strömt, bewirkt die Flüssigkeitsreibung zunächst nur eine Mitnahme der obersten Wasserschichten („Windtrift“). Es bilden sich also sowohl in der Luft als auch im Wasser Grenzschichten aus. Schon bei sehr kleiner Windstärke wird die Spiegelungsfähigkeit der Wasseroberfläche stark vermindert und von einer gewissen Windgeschwindigkeit an beginnen sich kurze Wellen über die Oberfläche des Wassers zu bewegen, die sich immer mehr vergrößern, je länger die Windbahn ist. Dies läßt darauf schließen, daß die ebene Wasserfläche von einer gewissen Windgeschwindigkeit an instabil wird. Es ist naheliegend, hierbei an einen Zusammenhang mit der bekannten Instabilität laminarer Grenzschichten zu denken. Auf diesen Zusammenhang scheint auch die Beobachtung hinzuweisen, daß ebenso wie bei laminaren Wandgrenzschichten die Temperaturschichtung der Luft von Einfluß auf das Stabilitätsverhalten ist. Denn nach einer Beobachtung von H. Frank [1] werden nachts infolge der stabileren Temperaturschichtung die Wasserwellen weniger leicht, d. h. erst bei höheren Windgeschwindigkeiten angeregt als bei Tage.

Immerhin unterscheidet sich die Bildung von Oberflächenwellen doch in einer Hinsicht vom Instabilwerden einer laminaren Grenzschicht. Während nämlich die laminare Wandgrenzschicht bei noch so kleiner Strömungsgeschwindigkeit instabil wird, wenn nur die Grenzschichtdicke genügend angewachsen ist, sprechen andererseits die Beobachtungen und Versuche für eine untere Grenze der Windgeschwindigkeit, welche Oberflächenwellen hervorzurufen vermag.

In qualitativer Übereinstimmung hiermit konnte Lord Kelvin (William Thomson) [2] theoretisch nachweisen, daß oberhalb einer gewissen, im Vergleich zu den Beobachtungen allerdings viel zu hohen Windstärke Oberflächenwellen auch ohne Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung also lediglich infolge dynamischer Druckänderungen angefacht werden können. Bei Annahme von Potentialströmung ergibt sich nämlich für die Wellengeschwindigkeit c bei einer Windgeschwindigkeit U die Formel:

$$c = \frac{r}{1+r} U \pm \sqrt{c_0^2 - \frac{r}{(1+r)^2} U^2} \dots \dots \dots (1,1).$$

Hierbei ist r das Verhältnis der Dichten von Luft und Wasser. Für Wasser von 15° und Luft von 20° und 760 mm Hg ist $r = 0,001218$. c_0 ist die einer bestimmten Wellenlänge zugeordnete Wellengeschwindigkeit bei Windstille. c_0 hat ein Minimum von $c_{0\min} = 23,2$ cm/sec bei einer Wellenlänge $\lambda = 1,72$ cm. Es ist dies die Grenzwellenlänge zwischen den kurzen Kapillarwellen und den langen Schwerewellen. Nach Formel (1,1) wird die Wellengeschwindigkeit c dann konjugiert komplex, wenn $U > \frac{1+r}{\sqrt{r}} \cdot c_0$. Die niedrigste Windgeschwindigkeit, bei der diese Instabilität auftritt, ist offenbar durch den Kleinstwert von c_0 gegeben, so daß man $U_{\min} = 666$ cm/sec erhält.

Die von verschiedenen Beobachtern [3], [4] in der Natur festgestellten Zahlenwerte für die kritische Windgeschwindigkeit betragen etwa 85 bis 110 cm/sec, liegen also erheblich unter dem Wert der reibungslosen Theorie. Allerdings sind diese Beobachtungen nur teilweise zu einem quantitativen Vergleich geeignet, weil durchweg die Änderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe über dem Wasserspiegel nicht beachtet wurde und daher die Angaben unzuverlässig sind. Zuverlässiger sind Messungen, die an Versuchsanordnungen mit künstlichem Luftstrom gewonnen wurden. Solche Messungen sind von Th. Stanton [5], G. Weinblum [6] und W.

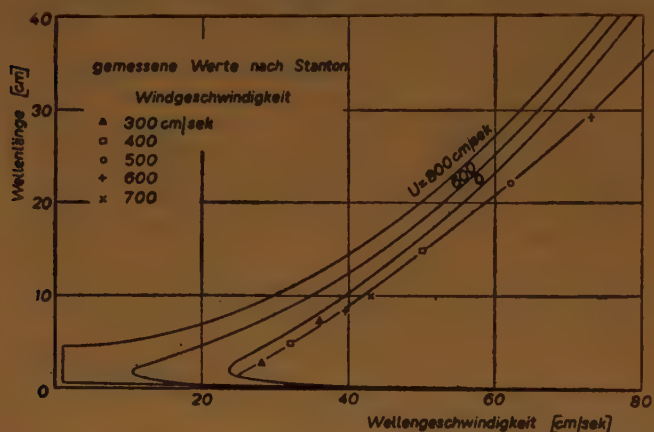


Bild 1. Abhängigkeit der Wellenlänge von der Wellengeschwindigkeit bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten nach der Kelvinschen Formel (1.1) und nach Messungen von Th. Stanton [5].

Wuest [7] durchgeführt worden. Stanton benutzte für seine Versuche einen etwa 15 m langen geschlossenen Wasserkanal, wobei er durch zwei Fenster beobachtete, die 4,57 bzw. 12,48 m vom Anfang des Kanals entfernt waren. Die Kelvinsche Formel (1.1) konnte durch diese Messungen nicht bestätigt werden. Vielmehr ist die einer bestimmten Wellenlänge zugeordnete Wellengeschwindigkeit, wie aus Bild 1 zu sehen ist, merklich größer als bei Windstille im Gegensatz zur Kelvinschen Theorie. Merkwürdigerweise scheinen alle Meßpunkte unabhängig von der Windstärke auf einer einzigen Kurve zu liegen. Auch bezüglich der unteren Windschwelle ergeben sich wesentliche Abweichungen gegenüber der Kelvinschen Theorie. Bei einer Windgeschwindigkeit von 2 m/sec bilden sich nach Stanton „Rippeln“, d. h. Wellen kleiner Wellenlänge, während sich größere Wellen erst von 2,5 m/sec an bilden sollen. In Bild 2 sind die an beiden Beobachtungsstellen gewonnenen Meßergebnisse aufgetragen. Die Kurven scheinen sich in der Tat bei 2–2,5 m/sec Windgeschwindigkeit zu treffen. Aus Bild 2 erkennt man gleichzeitig, daß die Wellenlänge mit zunehmendem Abstand vom Anfang des Beckens um so schneller anwächst, je mehr die Windgeschwindigkeit den kritischen Wert überschreitet.

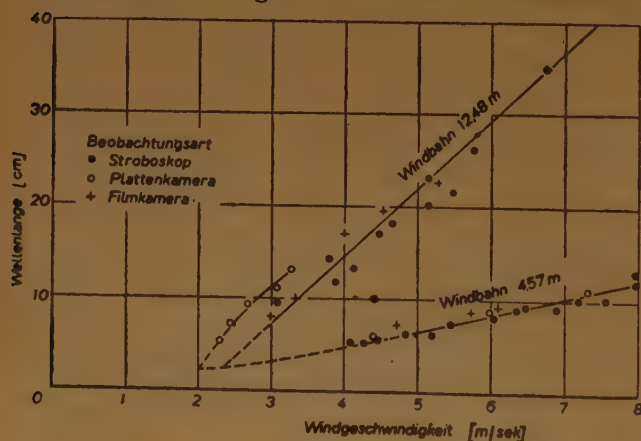


Bild 2. Abhängigkeit der Wellenlänge von der Windgeschwindigkeit bei verschiedener Länge der Windbahn nach Windkanalversuchen von Th. Stanton [5].

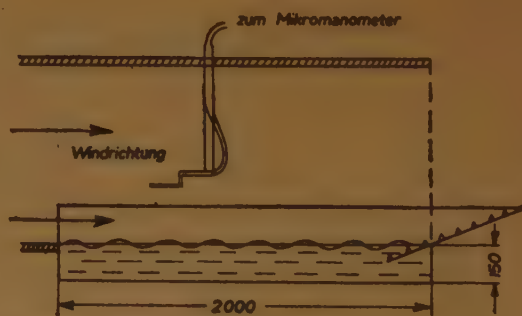


Bild 3. Wellenringe zur Untersuchung der Entstehung von Wasserwellen durch Wind (nach W. Wuest [6]).

G. Weinblum [6] erhielt bei Versuchen, die in der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schifffahrt durchgeführt wurden, für die kritische Windgeschwindigkeit den Wert ~ 2 m/sec. Im Bereich von 1–2 m/sec konnte Weinblum „nur ein leichtes Vibrieren der Wasseroberfläche beobachten, das sich grundsätzlich von den später auftretenden Wellen unterscheidet. Dabei war bezeichnend, daß bei den genannten geringen Windstärken selbst durch elastische Schwingungen angefachte kurze Wellen bald wieder abklangen.“ Zur Ergänzung dieser Versuche wurden vom Verfasser 1940 Messungen an einem Wasserbecken mit künstlichem Luftstrom ausgeführt, wobei insbesondere die Vorgänge am Anfang des Beckens untersucht

werden sollten. Für die Durchführung der Versuche wurde eine Wellenrinne von 2 m Länge, 0,8 m Breite und 0,15 m Tiefe hergestellt. Um eine Reflexion der Wellen am Ende des Beckens zu verhindern, war dieses als flach ansteigendes „Ufer“ ausgebildet und aufgenietete Blechstreifen sollten die kinetische Energie der Wellen vernichten (Bild 3). Das Wasserbecken wurde im „Rauhigkeitskanal“ des KWI für Strömungsforschung in Göttingen aufgestellt. Es war allerdings mit dieser Anlage, die an sich für größere Windgeschwindigkeiten bestimmt ist, nur durch improvisierte Maßnahmen möglich, zu kleineren Windgeschwindigkeiten zu gelangen. Bei einer Windgeschwindigkeit von 2,5 m/sec trat eine deutliche Veränderung der Wasseroberfläche ein. Jedoch sind stationäre Versuche bei kleineren Windgeschwindigkeiten nicht durchgeführt worden. Besonders auffällig war diese Änderung der Wasseroberfläche, wenn bei Inangabe des Gebläses durch eine Schwingung der Windkanalanlage bei niedrigen Drehzahlen Kapillarwellen von etwa 1,2 cm Länge hervorgerufen wurden, die aber bei Überschreiten der kritischen Windgeschwindigkeit ganz plötzlich zu Windwellen umschlugen. Während die Kapillarwellen sich durch eine ganz gerade Front auszeichneten, waren die Wellenkämme der ersten Windwellen ganz unregelmäßig. Die Wellenfrequenz wurde stroboskopisch gemessen. Zur Bestimmung der Wellenlänge waren auf dem Boden des Beckens verschiedenfarbige Streifen mit Abständen von 1,7 bis 2,0 cm angebracht, und es wurde bei stroboskopischer Beobachtung versucht, die Reflexe der Wellen mit einem der Streifensysteme zur Deckung zu bringen. Zur Kontrolle wurde außerdem noch die Wellengeschwindigkeit zwischen zwei Marken gestoppt. In einem Abstand von 30 cm vom Anfang des Beckens entfernt wurden folgende Werte gemessen:

Windgeschwindigkeit	cm/sec	300	400
Wellenlänge	cm	1,70—1,75	1,75—1,80
Wellengeschwindigkeit	cm/sec	26,5	27,5

Eine wesentliche Rolle spielt auch die Beschaffenheit der Wasseroberfläche. Wenn der Windkanal einige Zeit in Betrieb war, hatte sich auf der Wasseroberfläche feinsten Staub abgelagert. Eine derartige Staubschicht wirkt wie eine feste Wand, so daß sich im Wasser keine Grenzschicht ausbildet und die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers Null ist, während sie sonst etwa 3% der Windgeschwindigkeit beträgt. Die Wellenbildung tritt erst bei höheren Windgeschwindigkeiten ein. Nach einem anderen Versuch des Verfassers, der 1941 mit einem kleinen Leybold-Gebläse durchgeführt wurde, wirkt sich eine Petroleumhaut auf der Wasseroberfläche dahingehend aus, daß sich die ersten Wellen erst etwa bei 5 m/sec Windgeschwindigkeit bilden und die Wellenlänge der ersten Wellen wurde aus photographischen Aufnahmen zu 2,5 cm bestimmt.

Für die Art der Grenzschicht im Wasser ist die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers kennzeichnend [7]. Bei konstanter Windgeschwindigkeit ist die Oberflächengeschwindigkeit ebenfalls konstant, wenn sowohl Luftgrenzschicht als auch Wassergrenzschicht entweder laminar oder beide turbulent sind und zugleich mit verschwindender Dicke beginnen. Ist dagegen die Luftgrenzschicht turbulent und die Wassergrenzschicht laminar, so wächst die Oberflächengeschwindigkeit immer mehr an, bis schließlich die Wassergrenzschicht ebenfalls turbulent wird und die Oberflächengeschwindigkeit einem konstanten Wert zustrebt. Die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers kann aber leicht durch geeignete Schwimmkörper bestimmt werden. Man muß nur dafür sorgen, daß diese nicht aus dem Wasser herausragen und dadurch, daß sie vom Winde angetrieben werden, einen falschen Wert anzeigen. Bei Windkanalmessungen des Verfassers, die mit der früher beschriebenen Versuchseinrichtung durchgeführt wurden, erwiesen sich Tropfen von Paraffinöl, das durch Anilinfarbstoff rot gefärbt war, als besonders geeignet. Bild 4 zeigt einige Meßergebnisse. Die Luftgrenzschicht war bei den Versuchen turbulent und hatte schon eine gewisse Dicke (etwa 2 cm) erreicht, ehe sie mit der Wasserfläche in Berührung

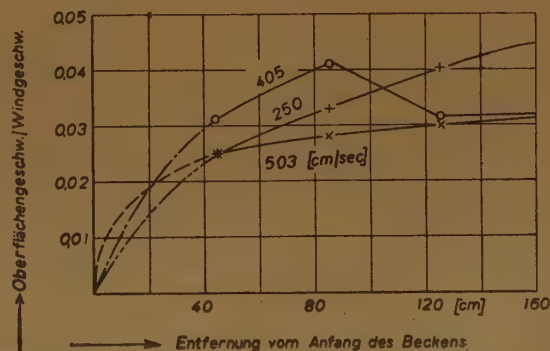


Bild 4. Oberflächengeschwindigkeit des Wassers in Abhängigkeit von der Länge der Windbahn für verschiedene Windgeschwindigkeiten (nach Messungen von W. Wuest [6])

schon eine gewisse Dicke (etwa 2 cm) erreicht, ehe sie mit der Wasserfläche in Berührung

trat. Die Wassergrenzschicht ist zunächst laminar und wird erst nach Durchlaufen einer gewissen Länge turbulent. Nach den Versuchen tritt übrigens die Wellenbildung bereits ein, ehe die Wassergrenzschicht turbulent geworden ist. Nach dem Umschlag zur Turbulenz strebt das Verhältnis der Oberflächengeschwindigkeit des Wassers zur ungestörten Windgeschwindigkeit dem Grenzwert 0,032 zu.

§ 2. Die Stabilität der Wasserfläche bei Wind

Wir beschränken uns auf laminare Grenzschichten in Wasser und Luft und überlagern dieser Grundströmung Störungsbewegungen, deren Amplitude so klein ist, daß eine Linearisierung der Bewegungsgleichungen hinsichtlich dieser Größen gerechtfertigt ist. Die ungestörte Grenzschicht möge sich über mehrere Wellenlängen der Störung nicht oder allenfalls so wenig ändern, daß in der nachfolgenden Theorie für die Grundströmung ein nur vom Wandabstand y abhängiger Mittelwert $U(y)$ angenommen werden kann. Dabei wird aber nicht vorausgesetzt, daß die Grenzschichtdicke klein gegen die Wellenlänge der Störung ist, so daß also der Störungsdruck auch vom Wandabstand abhängig ist.

Zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung wird die Störungsbewegung von einer Stromfunktion Ψ abgeleitet, die als eine in x -Richtung (Hauptströmungsrichtung) fortschreitende Wellenbewegung angenommen wird, deren Amplitude φ nur von y abhängt:

$$\Psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.1).$$

Hierbei ist $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ die Wellenlänge und β demnach immer reell, während c komplexe Werte annehmen kann, deren reeller Teil die Phasengeschwindigkeit der Störung und deren imaginärer Teil die Anfachung oder Dämpfung ergibt. Im folgenden soll der Durchgang zur Instabilität untersucht werden, so daß c im allgemeinen, d. h. sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt, als reell vorausgesetzt wird. Für die Störungsamplitude erhält man aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen durch Elimination des Druckes:

$$(U - c)(\varphi'' - \beta^2 \varphi) - U'' \varphi = -\frac{i\nu}{\beta}(\varphi'''' - 2\beta^2 \varphi'' + \beta^4 \varphi) \quad (2.2).$$

Hierbei bezeichnet ν die kinematische Zähigkeit. Die Störungsgeschwindigkeiten ergeben sich aus der Stromfunktion zu

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \varphi'(y) e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.3)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i\beta \varphi(y) e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.4).$$

Der reibungslose Störungsdruck ergibt sich durch Integration der Bewegungsgleichung zu:

$$p = \rho [U' \varphi - (U - c) \varphi' - g \zeta_0] e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.5).$$

Dabei ist

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.6)$$

die Auslenkung eines Flüssigkeitsteilchens infolge der Störungsbewegung, g die Erdbeschleunigung und ρ die Dichte. Mit der Normalkomponente der Geschwindigkeit und damit nach (2.4) mit der Stromfunktion besteht folgender Zusammenhang:

$$v = \frac{d\zeta}{dt} \approx U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = i\beta(U - c) \zeta_0 e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.7),$$

so daß

$$\zeta_0 = -\varphi(y) \frac{1}{U - c} \quad (2.8).$$

Bei Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung ist die Normal- und Tangentialspannung nach H. L a m b [8] gegeben durch:

$$p_{vv} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -p - 2\mu i\beta \varphi' e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.9)$$

$$p_{xv} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \mu(\beta^2 \varphi + \varphi'') e^{i\beta(x - ct)} \quad (2.10).$$

Hierbei ist $\mu = \rho\nu$ die dynamische Zähigkeit.

Die Differentialgleichung (2.2) ist von vierter Ordnung und hat daher vier unabhängige Lösungen. Bei Vernachlässigung der Reibungsglieder auf der rechten Seite ist die Differentialgleichung nur noch von zweiter Ordnung. Zwei Lösungen können demnach als „reibungslöse“ Lösungen angesehen werden. Im Gegensatz zu den restlichen beiden „Reibungslösungen“ sind sie nur langsam mit dem Wandabstand y veränderlich. Die vollständige Differentialgleichung führt offenbar auf je vier Integrationskonstante für die Luft- und Wassergrenzschicht. Insgesamt sind also acht Randbedingungen zu erfüllen, um diese Integrationskonstanten zu bestimmen. Diese Randbedingungen lauten:

$$y = \pm \infty \quad u = v = 0 \quad \dots \dots \dots (2.11)$$

$$y = 0 \quad u, v, p_{xy} \text{ stetig} \quad \dots \dots \dots (2.12)$$

$$p_{yy} \text{ unstetig um den Betrag der Oberflächenspannung} \\ \text{zwischen Wasser und Luft} \quad \dots \dots \dots (2.13).$$

Wenn das Geschwindigkeitsprofil der Hauptströmung an der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft einen Sprung aufweist, ist statt der Stetigkeit von v die Stetigkeit von ζ_0 für $y = 0$ zu fordern.

§ 3. Anwendung auf einen Sonderfall

Die Rechnung soll zunächst an einem besonders einfachen Sonderfall erläutert werden, der sich von der Kelvinschen Theorie nur dadurch unterscheidet, daß für die Störungsbewegungen die Flüssigkeitsreibung berücksichtigt wird, während von einer Grenzschicht der Hauptströmung gänzlich abgesehen wird. Die Grundströmung ist demnach gegeben durch:

$$y > 0 \quad U = U_1 = \text{const} \\ y < 0 \quad U = 0$$

Die Störungsgleichung (2.2) hat daher bei Berücksichtigung der Bedingungen für $y = \pm \infty$ in Luft und Wasser folgende Lösungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_L &= A e^{-\beta y} + B e^{-\beta \sqrt{1+iR_L} y} & R &= \frac{U_1 - c}{v_L \beta} \\ \varphi_W &= C e^{\beta y} + D e^{\beta \sqrt{1-iR_W} y} & R_W &= \frac{C}{v_W \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.1).$$

Die drei Randbedingungen (2.13) ergeben folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} A + B &= -(U_1 - c)/c (C + D) \\ A + B + [\sqrt{1+iR_L} - 1] B &= -(C + D) - [\sqrt{1-iR_W} - 1] D \\ A + B + i R_L/2 B &= \mu_W/\mu_L (C + D) - \mu_W/\mu_L i R_W/2 D. \end{aligned}$$

Hieraus errechnet man:

$$[\sqrt{1-iR_W} - 1] D = \frac{\{\mu_L R_L/(\sqrt{1+iR_L} - 1) U_1/c - 2\} + 2i[\mu_W + \mu_L(U_1/c - 1)](C + D)}{\mu_L R_L/(\sqrt{1+iR_L} - 1) - \mu_W R_W/(\sqrt{1-iR_W} - 1)} \quad (3.2). \\ = (A_1 + i A_2) (C + D)$$

Die Oberflächenspannung T an der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft erzeugt im Wasser einen Überdruck von:

$$-T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = + \beta^2 T \varphi(0)/(U_1 - c) e^{i\beta(x-ct)}$$

Setzt man

$$\frac{g}{\beta} \frac{\varrho_W - \varrho_L}{\varrho_W + \varrho_L} + \frac{T \beta}{\varrho_W + \varrho_L} = c_0^2,$$

wo c_0 die Kelvinsche Wellengeschwindigkeit bei Abwesenheit von Wind ist, so erhält man mit (2.5), (2.9) und (2.13):

$$\left. \begin{aligned} (c_0/c)^2 &= \left[1 + (U_1/c + 2) \frac{\varrho_L}{\varrho_W + \varrho_L} \right] (1 + A_1) - 2 \frac{\mu_W - \mu_L}{\varrho_W + \varrho_L} \frac{\beta}{c} A_2 \\ &+ i \left\{ \left[1 + (U_1/c - 2) \frac{\varrho_L}{\varrho_W + \varrho_L} \right] A_2 + 2 \frac{\mu_W - \mu_L}{\varrho_W + \varrho_L} \frac{\beta}{c} (1 + A_1) \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.3)$$

oder Näherungsweise mit $\frac{1}{\sqrt{R_W}} = \frac{\sqrt{\tau_W \beta}}{c} \ll 1$, wenn c reell sein soll:

$$\left. \begin{aligned} (c_0/c)^2 &\approx 1 + (U_1/c - 2) e_L/(e_W + e_L) \\ A_2 &\approx 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.4).$$

A_2 ist aus (3.2) zu berechnen. Näherungsweise kann man wegen $\mu_L \ll \mu_W$ das erste Glied im Nenner vernachlässigen und $\sqrt{1 - i R_W} - 1 \approx \sqrt{-i R_W}$ setzen. Jedoch bereitet es keine grundsätzliche Schwierigkeit, mit den vollständigen Formeln (3.3) und (3.2) zu rechnen. Die Näherungsformel ergibt:

$$\sqrt{R_L} = \sqrt{2} \left(\frac{\mu_W}{\mu_L} + U_1/c - 1 \right) \frac{1}{U_1/c - 2} \dots \dots \dots (3.5)$$

Man beachte, daß man für $U_1 = 0$ nicht genau die Kelvinsche Formel bei Windstille erhält. Dies kommt durch die Forderung, daß die Tangentialgeschwindigkeit der Störung an der Grenzfläche stetig sein soll im Gegensatz zur Kelvinschen Theorie, wo Potentialströmung vorausgesetzt wird. In Bild 5 sind die berechneten Werte aufgetragen. Es ergibt sich eine Mindestgeschwindigkeit von 160 cm/sec bei einer Wellenlänge $\lambda = 3$ cm. Hinsichtlich der Windschwelle ist die Übereinstimmung mit den Messungen als gut zu bezeichnen, wenn man bedenkt, daß die bei Windgeschwindigkeiten über 2 m/sec beobachtete Wellenbildung ja bereits eine gewisse Anfachung voraussetzt.

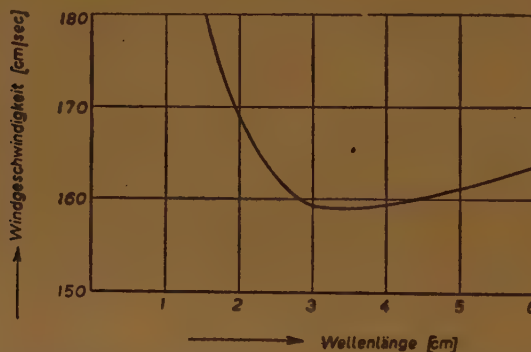


Bild 5. Kritische Windgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei Vernachlässigung der Grenzschichten in Wasser und Luft (jedoch Reibungseinfluß auf die Störungen berücksichtigt)

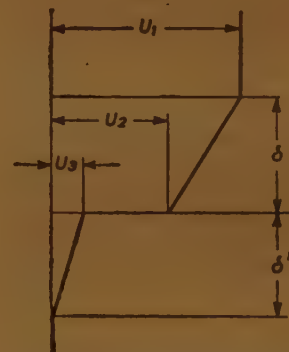


Bild 6. Aus Geradenstücken zusammengesetztes Geschwindigkeitsprofil als Grundlage der Näherungsrechnung (schematisch)

§ 4. Lineare Grenzschichten in Wasser und Luft

Wir versuchen im folgenden, die Grenzschichten in Luft und Wasser näherungsweise dadurch zu berücksichtigen, daß wir die Grenzschichtprofile durch Geradenstücke entsprechend Bild 6 ersetzen. Dabei soll ein Geschwindigkeitssprung in der Trennungsfläche zugelassen werden. Wegen der Wahl der Geschwindigkeitsprofile verschwindet die Krümmung durchweg, so daß also $U''(y) = 0$. Durch Einführung der Wirbelgröße $\omega = \varphi'' - \beta^2 \varphi$ geht die Störungsgleichung (2.2) über in:

$$(U - c - i\nu\beta)\omega = -i\nu/\beta \omega''(y) \dots \dots \dots (4.1).$$

Wir betrachten schwach gedämpfte Schwingungen, für die $c = c_r - i\nu\beta$. (Wegen der Kleinheit von $\nu\beta$ handelt es sich praktisch um indifferente Schwingungen, so daß wir in den späteren Rechnungen c wieder als reell voraussetzen können. Statt y wird eine neue Veränderliche η eingeführt, die so gewählt ist, daß $\eta = 0$ an der kritischen Stelle $U = c$ ist. Wir setzen daher

$$U - c_r = U'(y) \varepsilon \eta,$$

wobei die Konstante ε so gewählt wird, daß (4.1) übergeht in

$$\eta \omega = -i \omega''(\eta) \dots \dots \dots : (4.2).$$

Daraus folgt umgekehrt:

$$\varepsilon = \left(\frac{\beta}{\nu} U'(y) \right)^{-1/3} \dots \dots \dots (4.3).$$

An der Grenzfläche $y = 0$ zwischen Wasser und Luft ist entsprechend Bild 6 $U = U_2$ in der Luft bzw. $U = U_3$ im Wasser. In der Luftgrenzschicht entspricht also dem Wert $y = 0$ folgender Wert von η :

$$\eta_{0L} = \frac{U_2 - c}{U' \varepsilon_L} = \frac{U_2 - c}{\beta \nu_L} (\varepsilon_L \beta)^2 \dots \dots \dots (4.4).$$

Eine entsprechende Beziehung ergibt sich in der Wassergrenzschicht für $y = 0$.

Ein Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung (4.2) ist in bekannter Weise [9] durch Besselsche Funktionen gegeben:

$$\eta^{1/2} J_{1/2} \left(\frac{2}{3} \eta^{3/2} e^{-i\pi/4} \right) = (1/3)^{1/2} (-i)^{1/6} / \Gamma(4/3) \cdot F_1''(\eta) \dots \dots \dots (4.5)$$

$$\text{bzw. } \eta^{1/2} J_{-1/2} \left(\frac{2}{3} \eta^{3/2} e^{-i\pi/4} \right) = (1/3)^{-1/2} (-i)^{-1/6} / \Gamma(2/3) \cdot F_2''(\eta) \dots \dots \dots (4.6).$$

Die Funktionen F_1'' und F_2'' sind von H. Schlichting [10] als Reihenentwicklung dargestellt und für Werte von $-4 \leq \eta \leq 4$ tabelliert. Für die Luftgrenzschicht kommt nur dasjenige Lösungsaggregat

$$\omega = C_1 F_1'' + C_2 F_2'' \dots \dots \dots (4.7)$$

in Frage, das für große reelle positive η gegen Null geht, für die Wassergrenzschicht dagegen dasjenige, das für große reelle negative η verschwindet. Diese Bedingung läßt sich erfüllen, wenn man die Lösung für große η durch Hankelsche Funktionen darstellt. Durch Anwendung der Übergangsformeln zwischen der Potenzreihenentwicklung durch Besselsche Funktionen und der asymptotischen Entwicklung durch Hankelsche Funktionen kann in der Lösung (4.7) die eine Integrationskonstante eliminiert werden. Für die Luftgrenzschicht ergibt sich dann:

$$\omega_L = C_L (F_1'' - e^{-i\pi/6} 3^{2/3} \Gamma(4/3) / \Gamma(2/3) F_2'') = C_L F_L'' \dots \dots \dots (4.8),$$

oder zahlenmäßig:

$$\omega_L = C_L [F_1'' - (1,1882 - 0,6860 i) F_2''].$$

Die Indizes L und W beziehen sich jeweils auf die Luft- und Wassergrenzschicht, während die Größen ohne diese Indizes für beide gemeinsam gelten.

Man hat also weiterhin die Differentialgleichung

$$\varphi''(\eta) - \beta^2 \varphi(\eta) = C F''(\eta) \dots \dots \dots (4.9)$$

zu behandeln mit der allgemeinen Lösung

$$\varphi(\eta) = \left[A + \frac{\varepsilon}{2\beta} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\beta(\eta-\eta_0)} C F''(\eta) d\eta \right] e^{\beta\eta} + \left[B - \frac{\varepsilon}{2\beta} \int_{\infty}^{\eta} e^{\beta(\eta-\eta_0)} C F''(\eta) d\eta \right] e^{-\beta\eta} \quad (4.10).$$

Durch partielle Integration kann man hier noch eine Reihenentwicklung nach der kleinen Größe ε vornehmen:

$$\varphi = A e^{\beta\eta} + B e^{-\beta\eta} + \varepsilon^2 C F + \text{höhere Glieder in } \varepsilon \dots \dots \dots (4.11),$$

wobei

$$F = \int_{\eta_1=-\infty}^{\eta} \int_{\eta_2=-\infty}^{\eta_1} F''(\eta_1) d\eta_1 d\eta_2 \dots \dots \dots (4.12).$$

Bei der Berechnung der Luftgrenzschicht ist zu beachten, daß die kritische Stelle $\eta = 0$ im Integrationsbereich liegt. Es ist daher erforderlich, mit den Potenzreihenentwicklungen von $\eta = 0$ aus zu rechnen, während bei der Wassergrenzschicht die asymptotischen Entwicklungen im allgemeinen ausreichend sind. Aus diesem Grunde werden folgende Umformungen vorgenommen:

$$F_L' = \int_{\eta_1=-\infty}^{\eta} \eta_L''(\eta_1) d\eta_1 = - \int_0^{\infty} F_L'' d\eta_1 + \int_0^{\eta} F_L'' d\eta_1 = -F_{\infty L}' + F_L'^* \dots \dots \dots (4.13).$$

Aus der für Zylinderfunktionen $J_\nu(t)$ für beliebiges ν gültigen Formel (vgl. z. B. [11])

$$\int_0^\infty J_\nu(t) dt = 1$$

folgt aber:

$$F_{\infty L}' = \int_0^\infty F_L'' d\eta_1 = - (1 - e^{i\pi/3}) 3^{1/3} \Gamma(4/3) = 0,64395 - 1,1154 i \dots \dots \dots (4.14).$$

Durch weitere Integration ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} F_L &= \int_{-\infty}^{\eta} F'_L(\eta_1) d\eta_1 = \int_0^{\eta} F'_L(\eta_1) d\eta_1 - \int_0^{\infty} F'_L(\eta_1) d\eta_1 \\ &= \int_{\eta_1=0}^{\eta} \int_{\eta_2=0}^{\eta_1} F''_L(\eta_1) d\eta_1 d\eta_2 - F'_{\infty L} \eta - F_{\infty L} = F_L^* - F'_{\infty L} \eta - F_{\infty L} \end{aligned} \right\} \dots (4.15).$$

Hierbei ist aber nach Schlichting [10] S. 56, Formel (19):

$$F_{\infty L} = \int_{\eta_1=0}^{\infty} \int_{\eta_2=0}^{\eta_1} F''_L(\eta_1) d\eta_1 d\eta_2 = -i \dots (4.16).$$

Insgesamt können wir also die Lösungen für die Luft- und Wassergrenzschicht in folgender Weise anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_L &= A_L e^{\beta y} + B_L e^{-\beta y} + C_L F_L \\ \varphi_W &= A_W e^{\beta y} + B_W e^{-\beta y} + C_W F_W \end{aligned} \right\} \dots (4.17).$$

Die ersten beiden Glieder sind jeweils die reibungslosen Lösungen, das dritte Glied ist dagegen die Reibungslösung. Die Reibungsglieder klingen im Vergleich zum reibungslosen Lösungsanteil nach außen rasch ab, so daß man am Rande der Grenzschicht nur noch die reibungslosen Lösungsanteile zu berücksichtigen braucht. Außerhalb der Grenzschichten lauten aber die Lösungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_L &= \bar{A} e^{-\beta y} \\ \varphi_W &= \bar{B} e^{\beta y} \end{aligned} \right\} \dots (4.18).$$

Am Rande der Grenzschicht, der durch $y = \delta_L$ bzw. $y = -\delta_W$ dargestellt sei, muß aber φ und φ' stetig sein. Bezeichnet man in (4.17) die reibungslosen Lösungsanteile mit

$$\varphi^* = A \exp(\beta y) + B \exp(-\beta y),$$

so folgt aus der Stetigkeit von φ und φ' mit (4.18) nach Eliminieren von \bar{A} und \bar{B} :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_L^*(\delta_L)/\beta \varphi_L^*(\delta_L) &= -1 \\ \varphi_W^*(-\delta_W)/\beta \varphi_W^*(-\delta_W) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots (4.19).$$

Durch die Beziehungen (4.19) kann eine der beiden Konstanten der reibungslosen Lösungen eliminiert werden, so daß insgesamt noch vier Integrationskonstanten zu ermitteln sind, wofür die Randbedingungen (2.12) und (2.13) ausreichend sind.

Aus den drei Randbedingungen (2.12) findet man ganz entsprechend zu (3.2):

$$\begin{aligned} (F'_{0W}/\beta \varepsilon_W - \Theta_W F_{0W}) C_W &= \\ &= \frac{\mu_L/\mu_W [\Theta_W + \Theta_L (U_2 - c)/(U_3 - c)] \Phi_L - 2[1 - \mu_L (U_2 - c)/\mu_W (U_3 - c)]}{\Phi_W - \mu_L/\mu_W \Phi_L} \varphi_{0W}. \end{aligned} \quad (4.20).$$

Hierbei sind folgende Abkürzungen gebraucht:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_L &= -\beta \varphi_L^*(0)/\varphi_L^*(0) \\ \Theta_W &= \varphi_W^*(0)/\beta \varphi_W^*(0) \end{aligned} \right\} \dots (4.21),$$

wobei φ^* wiederum den reibungslosen Lösungsanteil darstellt.

$$\Phi_L = \frac{F'_{0L}/F'_{0L} \beta \varepsilon_L - \beta \varepsilon_L F_{0L}/F'_{0L}}{1 + \Theta_L \beta \varepsilon_L F_{0L}/F'_{0L}} \dots (4.22).$$

$$\Phi_W = \frac{F'_{0W}/F'_{0W} \beta \varepsilon_W - \beta \varepsilon_W F_{0W}/F'_{0W}}{1 - \Theta_W \beta \varepsilon_W F_{0W}/F'_{0W}} \dots (4.23).$$

Der Index 0 deutet dabei an, daß die Werte der Funktionen F_L und F_W und ihrer Ableitungen an der Stelle $y = 0$ ($\eta = \eta_{0L}$ bzw. $\eta = \eta_{0W}$) zu nehmen sind. Nach (4.4) ist aber

$$\beta \varepsilon_L = \sqrt{-\eta_{0L}} \sqrt{\frac{\beta v_L}{c - U_2}}.$$

$$\beta \varepsilon_W = \sqrt{-\eta_{0W}} \sqrt{\frac{\beta v_W}{c - U_3}}.$$

η_{0L} , η_{0W} sind immer negativ, weil die kritische Stelle innerhalb der Luftgrenzschicht liegt. Für die Luftgrenzschicht sind die Funktionen $F''_{0L}/F'_{0L} \sqrt{-\eta_{0L}}$ und $\sqrt{-\eta_{0L}} F_{0L}/F'_{0L}$ in Tabelle 1 in Abhängigkeit von η_{0L} zusammengestellt. Für die Wassergrenzschicht leitet man aus den Hankelschen asymptotischen Reihen folgende Formeln ab:

$$F''_{0W}/F'_{0W} \sqrt{-\eta_{0W}} = \sqrt{-i} [1 + 0,75 \sqrt{i} (-\eta_{0W})^{-3/2} + 1,2811 i (-\eta_{0W})^{-3} + \dots] \quad (4.24),$$

$$\sqrt{-\eta_{0W}} F_{0W}/F'_{0W} = \sqrt{i} [1 - 1,25 \sqrt{i} (-\eta_{0W})^{-3/2} - 1,5948 i (-\eta_{0W})^{-3} - \dots] \quad (4.25).$$

In Tabelle 1 sind diese Formeln für einige Werte von η_{0W} ausgewertet.

Tabelle 1

Luftgrenzschicht		
η_{0L}	$F''_{0L}/F'_{0L} \sqrt{-\eta_{0L}}$	$\sqrt{-\eta_{0L}} F_{0L}/F'_{0L}$
0	$(-0,9220 - 0,484 i)/\sqrt{-\eta_{0L}}$	$(-0,602 + 0,387 i) \sqrt{-\eta_{0L}}$
0,5	$-1,178 - 0,5217 i$	$-0,545 + 0,269 i$
1,0	$-0,7490 - 0,1850 i$	$-0,892 + 0,350 i$
1,5	$-0,5451 + 0,0163 i$	$-1,254 + 0,320 i$
2,0	$-0,4152 + 0,1775 i$	$-1,698 + 0,191 i$
2,5	$-0,3294 + 0,3330 i$	$-2,147 - 0,196 i$
3,0	$-0,2789 + 0,4991 i$	$-2,420 - 0,899 i$
3,5	$-0,2972 + 0,693 i$	$-2,130 - 1,915 i$
4,0	$-0,438 + 0,852 i$	$-0,986 - 2,428 i$
∞	$-0,7071 + 0,7071 i$	$-0,7071 - 0,707 i$
Wassergrenzschicht		
η_{0W}	$F''_{0W}/F'_{0W} \sqrt{-\eta_{0W}}$	$\sqrt{-\eta_{0W}} F_{0W}/F'_{0W}$
6	$0,6603 - 0,7029 i$	$0,7123 + 0,7869 i$
8	$0,6757 - 0,7053 i$	$0,7093 + 0,7602 i$
10	$0,6843 - 0,7062 i$	$0,7082 + 0,7456 i$
∞	$0,7071 - 0,7071 i$	$0,7071 + 0,7071 i$

Für die weitere Rechnung legen wir folgende Werte für das Geschwindigkeitsprofil zugrunde, die sich nach einer früheren Untersuchung des Verfassers [7] für laminare Grenzschichten in Luft und Wasser ergeben:

$$U_2/U_1 = U_3/U_1 = 0,03,$$

$$\delta_W/\delta_L = 1,69.$$

Mit diesen Werten wird aber

$$\frac{\eta_{0W}}{\eta_{0L}} = \left[\frac{\nu_L}{\nu_W} \left(\frac{\delta_W}{\delta_L} \right)^2 \frac{(U_1 - U_2)^2}{U_3^2} \right]^{1/3} = (13,12 \cdot 2,86 \cdot 1045)^{1/3} = 34,0.$$

Man ersieht daraus, daß der Einfluß der Wassergrenzschicht nicht wesentlich sein kann, solange nicht etwa die Wellengeschwindigkeit nahezu gleich der Oberflächengeschwindigkeit des Wassers ist. Dieser Fall liegt aber weit außerhalb der auf Grund der Beobachtungen zu erwartenden Werte für die kritische Windgeschwindigkeit.

Wir haben schließlich noch die vierte Grenzbedingung (2.13) einzuführen, die wiederum wie (3.3) in einen reellen und imaginären Bestandteil zerfällt, wobei das Verschwinden des reellen Teiles die Phasengeschwindigkeit, das Verschwinden des imaginären Teiles dagegen eine Bedingung für den Durchgang zur Instabilität liefert.

Setzen wir an Stelle von (4.20):

$$(F'_{0W}/\beta \epsilon_W - \Theta_W F_{0W}) C_W = A_1 + i A_2,$$

so ergeben sich somit folgende beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{c_0}{c - U_3} \right)^2 = \left\{ 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W + \varrho_L} \frac{U_2 + U_3 - 2c}{U_3 - c} (\Theta_W + A_1) - \frac{\varrho_W}{\varrho_W + \varrho_L} \frac{U_3}{U_3 - c} \frac{1}{\beta \delta_W} + \frac{\varrho_L}{\varrho_W + \varrho_L} \frac{U_1 - U_2}{U_2 - c} \frac{U_3 - c}{U_3 - c} \frac{1}{\beta \delta_L} \right\} \quad (4.26).$$

$$[-\varrho_L (U_2 - c) + \varrho_W (U_3 - c)] A_1 = 2 (\mu_W - \mu_L) \beta (\Theta_W + A_1) \dots \quad (4.27).$$

Näherungsweise kann die rechte Seite in (4.27) vernachlässigt werden, so daß man als Bedingungsgleichung erhält:

$$A_2 = 0 \dots \dots \dots (4.28).$$

Wenn man als Veränderliche c/U_1 , $\beta \delta_L$ und $c/\beta v_L$ wählt, liefert (4.28) eine Beziehung zwischen diesen drei Größen, so daß demnach nur zwei davon frei wählbar sind. Mit Hilfe der Gleichung (4.26) bestimmt man ferner $c_0/\beta v$, wo c_0 wie früher die Kelvinsche Wellengeschwindigkeit bei Windstille ist. Andererseits ist aber wegen der bekannten Formel für die Kelvinsche Wellengeschwindigkeit c_0 die Größe $c_0/\beta v_L$ nur eine Funktion von β allein. Auf diese Weise gelingt es, zu einem gegebenen Wertepaar c/U_1 und $\beta \delta_L$ in einem gewissen Wertebereich die Größen c , U_1 , β und δ_L für sich getrennt zu bestimmen.

§ 5. Berücksichtigung der Profilkrümmung

Wir haben bisher der Rechnung Geschwindigkeitsprofile zugrundegelegt, die sich aus Geradenstücken zusammensetzen, so daß die Profilkrümmung durchgängig verschwindet. W. T o l l m i e n [9] hat aber gezeigt, daß die Profilkrümmung für die Stabilität laminarer Wandgrenschichten von ausschlaggebender Bedeutung ist. Es ist also auch beim vorliegenden Problem ein derartiger Einfluß zu vermuten. Die Profilkrümmung beeinflusst insbesondere die „reibunglosen“ Partikularlösungen, die ja bisher nach (4.11) lediglich durch Exponentialfunktionen dargestellt wurden. Man erhält diese Partikularlösungen auch bei allgemeinen Geschwindigkeitsprofilen verhältnismäßig leicht durch Reihenentwicklungen aus der reibungslosen Störungsgleichung, die aus der vollständigen Störungsgleichung (2.2) durch Vernachlässigung der rechten Seite hervorgeht. Die kritische Stelle $U = c_r$, wo Phasengeschwindigkeit der Störungsbewegung und Geschwindigkeit der Grundströmung übereinstimmen, ist eine singuläre Stelle (Stelle der Bestimmtheit) der reibungslosen Differentialgleichung. Zwei linear unabhängige Lösungen lassen sich als Potenzreihen P_1 und P_2 in der Umgebung der kritischen Stelle $y = y_k$ mit $y_1 = (y - y_k)/y_k$ als Veränderliche in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= y_1 P_1(y_1) \\ \varphi_2 &= P_2(y_1) + U_k''/U_k' \varphi_1 \log |y_1| - \begin{cases} 0 & y_1 > 0 \\ i\pi U_k''/U_k' \varphi_1 & y_1 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dieses Hinzutreten eines imaginären Bestandteiles beim Durchgang durch die kritische Stelle ist von W. T o l l m i e n nachgewiesen worden. φ_2 besitzt für $y_1 = 0$ eine Singularität, indem dort φ_2' logarithmisch unendlich wird. Damit dieses singuläre Verhalten verschwindet, muß die Reibung in einer kleinen Umgebung der kritischen Stelle berücksichtigt werden. Hierdurch geht auch der Phasensprung auf einer endlichen kleinen Strecke vor sich.

Die Geschwindigkeitsprofile, die sich bei laminarer Strömung in Luft und Wasser ausbilden, entsprechen den „Blasiusprofilen“ der Plattenströmung. Nach dem Vorgang von W. T o l l m i e n nähern wir dieses Profil durch eine lineare und quadratische Funktion an (Bild 7):

$$0 \leq y/\delta \leq 0,175 \quad U/U_1 = 1,68 y/\delta \dots \dots \dots (5.2)$$

$$0,175 \leq y/\delta \leq 1,015 \quad U/U_1 = 1 - (1,015 - y/\delta)^2 \dots \dots \dots (5.3)$$

$$1,015 \leq y/\delta \leq \dots \quad U/U_1 = 1 \dots \dots \dots (5.4)$$

Hierbei ist die Bezugslänge δ die halbe Breite der dem Blasiusprofil einbeschriebenen Parabel. Mit der Verdrängungsdicke δ^* der Grenzschicht besteht folgender Zusammenhang:

$$\delta^* = 0,341 \delta.$$

Die Geschwindigkeit an der Trennungsfläche von Luft und Wasser wurde dabei gleich Null gesetzt, d. h. der Vorgang wird von einem mit der Wasseroberfläche mitbewegten Koordinatensystem aus betrachtet (vgl. Bild 7). Außerdem beschränken wir uns darauf, den Krümmungseinfluß in der Luftgrenzschicht zu berücksichtigen, da ja nach dem Bisherigen der Einfluß der Wassergrenzschicht von untergeordneter Bedeutung ist.

Im Bereich der linearen Geschwindigkeitsverteilung ergeben sich natürlich wie früher Exponentialfunktionen für die reibungslosen Lösungen. Wegen des Zusammenhanges mit dem Folgenden schreiben wir diese Lösungen in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\beta \delta} \sin \beta (y - y_k) \\ \varphi_2 &= \cos \beta (y - y_k) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.5).$$

Dabei ist die kritische Stelle y_k gegeben durch $y_k = \delta c / 1,68 U_1$. Im wandnahen Bereich stellen wir zwar U durch eine lineare Funktion dar, doch dürfen wir nicht etwa $U' = \text{const.}$, $U'' = 0$ setzen. Es ist vielmehr entsprechend den ersten Gliedern der Blasius'schen Potenzreihe zu setzen:

$$U/U_1 = 1,68 y/\delta - 1,520 (y/\delta)^4,$$

so daß an der kritischen Stelle y_k gilt:

$$\delta U_k''/U_k' = -3,88 (c/U_1)^2 \quad (5.6).$$

Im Bereich der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung ist die kritische Stelle nach (5.4) gegeben durch:

$$y_k^* = \delta (1,015 - \sqrt{1 - c/U_1}) \quad (5.7).$$

An Stelle des Wandabstandes y führen wir folgende neue Veränderliche ein:

$$y_1 = \frac{y - y_k^*}{\delta \sqrt{1 - c/U_1}} \quad (5.8)$$

und setzen ferner:

$$\beta_1 = \beta \delta \sqrt{1 - c/U_1} \quad (5.9).$$

Auch wenn die kritische Stelle in den linearen Geschwindigkeitsbereich fällt, ist y_k^* durch (5.7) gegeben und stellt dann lediglich eine Rechengröße dar. Die reibungslosen Lösungen werden im parabolischen Bereich durch folgende Reihenentwicklungen dargestellt

$$\frac{\varphi_1}{\sqrt{1 - c/U_1}} = a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + a_3 y_1^3 + \dots \quad (5.10)$$

$$\varphi_2 = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \dots + \delta U_k''/U_k' \varphi_1 (\log y_1 - i\pi) \quad (5.11).$$

Das unterstrichene Glied verschwindet außerhalb der kritischen Stelle, also für $y_1 \geq 0$. Die Koeffizienten sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1; a_2 = -1/2; a_3 = \beta_1^2/6; a_4 = -\beta_1^2/18; \\ a_5 &= -\beta_1^2/720 + \beta_1^4/120; a_6 = -\beta_1^2/2400 - 23 \beta_1^4/10800; \\ b_0 &= 1; b_1 = 0; b_2 = -1 + \beta_1^2/2; b_3 = 1/8 + \beta_1^2/18; \\ b_4 &= 1/48 - 61 \beta_1^2/432 + \beta_1^4/24; b_5 = 1/192 + 29 \beta_1^2/5760 + \beta_1^4/225; \\ b_6 &= 1/640 + 623 \beta_1^2/3384000 - 2051 \beta_1^4/324000 + \beta_1^6/720. \end{aligned}$$

Die Reibungslösungen klingen bereits im linearen Teil des Geschwindigkeitsprofiles ab. Sie können daher aus dem vorhergehenden Abschnitt übernommen werden, wobei lediglich für U' der neue Wert $U' = 1,68 U_1/\delta$ zu setzen ist. Am äußeren Rand der Grenzschicht, d. h. für $y_1 = 1$ geht die reibungslose Lösung über in $\varphi = \text{const} \cdot \exp(-\beta y)$, so daß dort $\varphi' = -\beta \varphi$. Durch diese Bedingung kann in der Lösung des parabolischen Geschwindigkeitsbereiches

$$\varphi = A_1 \varphi_1 / \sqrt{1 - c/U_1} + B_1 \varphi_2$$

eine Integrationskonstante eliminiert werden. Auch an der Übergangsstelle vom parabolischen in den linearen Bereich muß φ und φ' stetig sein. Dabei ist das Hinzutreten eines imaginären Gliedes zu berücksichtigen, wenn die kritische Stelle durchschritten wird. Man erhält schließlich genau analog zu (4.21) Θ_L als Funktion von c/U_1 und $\beta \delta$, jedoch im Gegensatz zu früher als komplexe Größe. Die weitere Rechnung unterscheidet sich nicht von der früheren, da für die Wassergrenzschicht die Krümmung nicht berücksichtigt werden soll.

§ 6. Ergebnisse der Stabilitätsrechnung

In einer früheren Arbeit [7] führte der Verfasser die Stabilitätsrechnung ohne Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung durch, wobei ebenfalls lineare Geschwindigkeitsprofile in Wasser und Luft angenommen wurden. Wegen der Vernachlässigung der Zähigkeit treten als wesentliche Veränderliche nur c/U_1 und $\beta \delta_L$ in Erscheinung. Eine (4.27) entsprechende Beziehung liefert

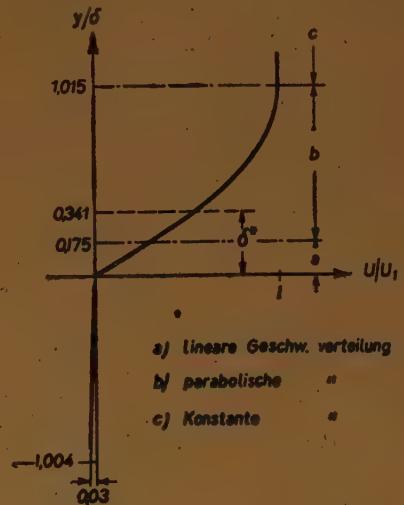


Bild 7. Grenzschichtprofil bei Berücksichtigung der Profilkürmung in der Luftgrenzschicht (maßstäblich)

füllt. Lösungen existieren nur für kleine Werte von $\beta\delta_L$. Während in Abb. 8 zwei Lösungskurven den instabilen Bereich abgrenzen, ist in Abb. 9 der Lösungsbereich von einer Kurvenschar überdeckt, von der jedoch nur einzelne Punkte berechnet wurden. Die Grenzen des Lösungsbereiches in Bild 9 umschließen also nicht wie in Bild 8 den instabilen Bereich, sondern lediglich den Bereich, in dem die Instabilitätskurven liegen. Im Gegensatz zum reibungslosen Stabilitätsproblem erhält man bei weiterer Ausrechnung die Größen U_1 , c , δ_L und β getrennt. In Bild 10 und 11 ist U_1 und δ_L über $\lambda = 2\pi/\beta$ aufgetragen. Als wesentliches Ergebnis erkennt man insbesondere aus Bild 11, daß die Länge der zuerst entstehenden Wellen wesentlich von der Grenzschichtdicke beeinflusst wird, in dem Sinne, daß um so längere Wellen entstehen, je größer die Grenzschichtdicke ist. Bei gegebener Grenzschichtdicke wird nur ein bestimmter Wellenlängenbereich angefacht und zwar am leichtesten die kürzesten Wellen dieses Bereiches, die in Bild 10 durch die ausgezogene Linie dargestellt sind. Am leichtesten werden Wellen von etwa 3 cm Länge angefacht, was einer Verdrängungsdicke von etwa 1,5 mm entspricht.

In Bild 12 und 13 sind die Ergebnisse der Stabilitätsrechnung bei Berücksichtigung der Profilkürmung aufgetragen. Die Rechnung wurde durchgeführt für $(c - U_2)/(U_1 - U_2) = 0,234$ und $0,2944$. Bei Auftragung der Grenzschichtdicke über der Wellenlänge fallen beide Kurven nahezu zusammen. Die Berücksichtigung der Profilkürmung bedingt keine wesentlichen Änderungen des Lösungscharakters, weshalb von der Berechnung weiterer Werte Abstand genommen wurde.

§ 7. Zusammenfassung

Für das Stabilitätsverhalten einer Wasserfläche bei Anwesenheit von Wind sind die Grenzschichten (insbesondere diejenige in der Luft) von erheblicher Bedeutung. Dabei bringt die Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung eine wesentliche

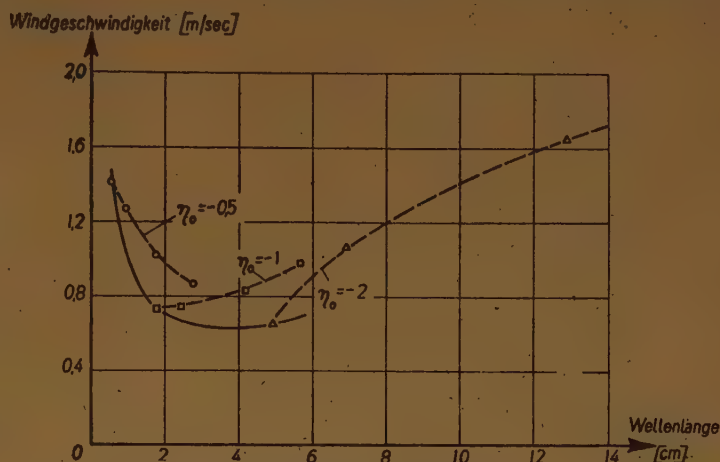


Bild 10. Kritische Windgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei linearen Grenzschichten

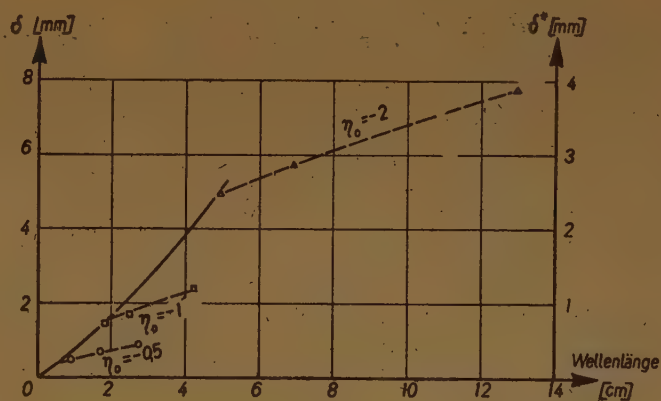


Bild 11. Grenzschichtdicke δ und Verdrängungsdicke δ^* in Abhängigkeit von der Wellenlänge

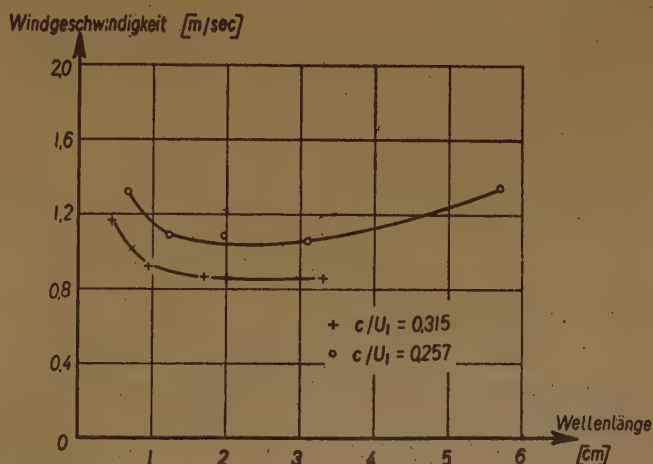


Bild 12. Kritische Windgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei Berücksichtigung der Profilkürmung

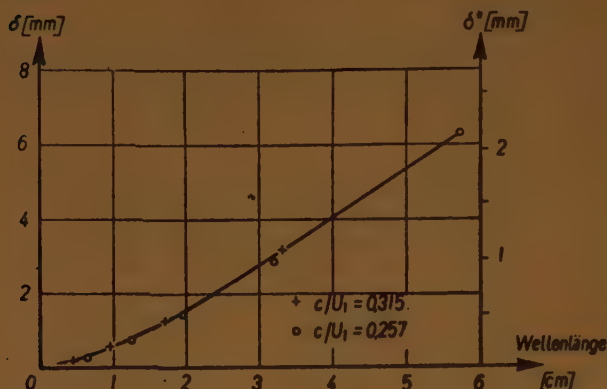


Bild 13. Grenzschieichtdicke δ und Verdrängungsdicke δ^* bei Berücksichtigung der Profilkrümmung

Änderung der Rechenergebnisse gegenüber der reibungslosen Theorie, die in einer früheren Arbeit des Verfassers behandelt wurde. Die Wellenlänge der zuerst gebildeten Wellen hängt wesentlich von der Grenzschieichtdicke ab und wächst mit zunehmender Grenzschieichtdicke an. Dagegen bringt eine Berücksichtigung der Profilkrümmung gegenüber der vereinfachenden Annahme von linearen Geschwindigkeitsprofilen in Luft und Wasser keine grundlegende Änderung der Ergebnisse. Die am leichtesten angeregten Wellen haben eine Länge von etwa 2 bis 4 cm. Windgeschwindigkeiten von etwa

0,7 m/sec genügen bereits zu ihrer Anfachung. Ein Vergleich mit beobachteten Werten ist deshalb nur unvollkommen, weil bei den Beobachtungen und Messungen wohl stets turbulente Grenzschieichten vorgelegen haben. Während nach Beobachtungen in der Natur, bei denen aber die Änderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe über dem Wasser nicht in Betracht gezogen wurde, kleinste Windgeschwindigkeiten von 0,85 bis 1,1 m/sec gefunden wurden, sollten nach Messungen am Windkanal erst Windgeschwindigkeiten von 2 bis 2,5 m/sec imstande sein, Wellen zu erregen. Wenn man annimmt, daß die Luftgeschwindigkeit ohne allmählichen Anstieg in einer Grenzschieicht über dem Wasser sofort den vollen Wert annimmt, wobei aber der Reibungseinfluß auf die Störungen im Gegensatz zur Kelvinschen Theorie der Potentialströmung berücksichtigt wird, ergibt sich merkwürdigerweise eine kritische Windgeschwindigkeit von 1,6 m/sec, also ein Wert, der einigermaßen vergleichbar mit den bei turbulenten Grenzschieichten am Windkanal beobachteten Werten ist. Ein Zusammenhang könnte insofern vermutet werden, weil auch bei turbulenten Geschwindigkeitsprofilen der Anstieg der Geschwindigkeit auf einen endlichen Wert in einer außerordentlich dünnen Grenzschieicht erfolgt.

Schrifttum

- [1] H. Frank: Über schwache Winde an der Ostseeküste. Ann. Meteorologie 1 (1948) H. 1 S. 25.
- [2] Lord Kelvin (W. Thomson): Hydrokinetic Solutions and Observations. Phil. Mag. 4 (1871).
- [3] Scott Russell: Reports on Waves. Rep. 14 Meet. Brit. Ass. London 1845.
- [4] H. Jeffreys: On the Formation of Water Waves by Wind. Proc. Roy. Soc. A 107 (1925) S. 189 und A 110 (1926) S. 241.
- [5] Th. Stanton: The Growth of Waves on Water Due to the action of Wind. Nach Stantons Tod von Miß D. Marshall und R. Haugton mitgeteilt in Proc. Roy. Soc. A 137 (1932) S. 283.
- [6] G. Weinblum: Seegangsforschung. Die Naturwissenschaften 26 (1938) S. 193.
- [7] W. Wuest: Über die Entstehung von Wasserwellen durch Wind. Dissertation Göttingen 1941 (Manuskript).
- [8] H. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche Ausgabe, 2. Auflage, § 326, 349.
- [9] W. Tollmien: Über die Entstehung der Turbulenz. Nachr. Göttinger Ges. Wissensch. Math.-Phys. Klasse 1929 S. 21.
- [10] H. Schlichting: Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Göttinger Ges. Wiss. Math.-Phys. Klasse 1935 S. 47.
- [11] G. N. Watson: Bessel Functions 1943 S. 391.

Eingegangen: 25. 11. 48.

KLEINE MITTEILUNGEN

Ein Kurvenblatt zur Berechnung von $a \cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} a \sin 2\alpha$.

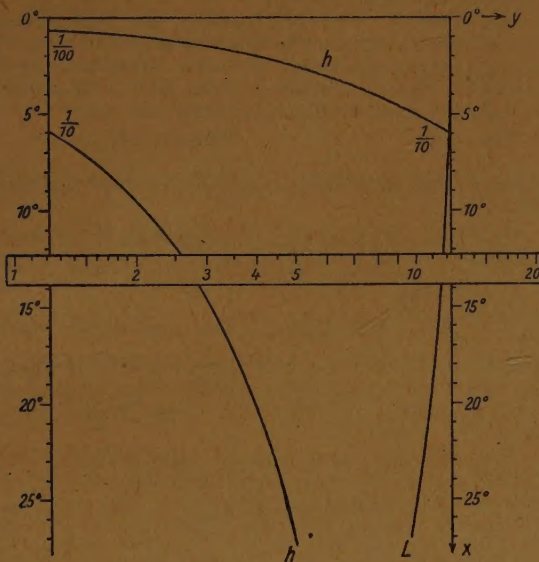
Beim tachymetrischen Messen werden der zwischen den Meßfäden des Fernrohres erscheinende Abschnitt a der Meßlatte und der Höhenwinkel der Fernrohrachse α gemessen. Aus ihnen ergibt sich die gesuchte Entfernung der Latte vom Fernrohr als $L = a \cos^2 \alpha$, der Höhenunterschied vom Fernrohr zum Zielpunkt auf der Latte als $h = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha$.

¹⁾ Vgl. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Bd., 2. Halbband, 1933, 63, insbesondere S. 273.

In der Regel reicht für die Berechnung von L und h die Genauigkeit des Rechenschiebers aus. Verwendet man einen gewöhnlichen Rechenschieber, dann muß man dabei a und α je zweimal einstellen. Sonderschieber ersparen von diesen vier Einstellungen eine, nämlich eine Einstellung von a . α muß man immer noch auf zwei recht verschiedenen Skalen einstellen. Weil zwischen diesen beiden Einstellungen L abgelesen und notiert wird, muß man sich α merken, was ermüdet und eine Quelle von Fehlern ist.

Bei Verwendung des auf dem nachstehenden Bild schematisch dargestellten Kurvenblattes stellt man a und α nur je einmal ein und kann dann L und h sofort

ablesen. Das Kurvenblatt enthält in kartesischen Koordinaten (x, y) die Kurve L mit der Gleichung $y = \log \cos^2 \alpha$ und die Kurve h mit der Gleichung $y = \log \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$. Dabei wird α auf der x -Achse aufgetragen. Das Blatt enthält nur Punkte (α, y) , für die $-1 \leq y \leq 0$ ist. Wegen der Periodizität der logarithmischen Skala ist die Kurve h dort, wo $\frac{1}{2} \sin 2\alpha = 0,1$ ist, d. i. bei $\alpha = 5^\circ 46'$, abgesetzt.



Kurvenblatt zur Berechnung von $a \cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} a \sin^2 2\alpha$

Aus diesem Kurvenblatt mißt man mit einem logarithmischen Maßstab, dessen Einheit die Einheit der y -Achse ist, die Größen L und h auf folgende Weise heraus. Man legt ihn so auf das Kurvenblatt, daß seine Oberkante die Teilungen links und rechts an der Stelle α schneidet und die rechte Teilung auf ihm die Stelle a trifft. Dann liest man auf ihm beim Schnittpunkt mit der Kurve L den Wert $L = a \cos^2 \alpha$, beim Schnittpunkt

mit der Kurve h den Wert $h = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha$ ab. Das Bild zeigt den Fall $a = 123$, $\alpha = 12^\circ 20'$. Auf einer genauen Ausführung des Kurvenblattes mit einer Einheit von 25 cm auf der y -Achse liest man mit dem zugehörigen Maßstab $L = 117,2$, $h = 25,7$ ab, was mit Rechenschiebergenaugigkeit stimmt.

Es ist vorteilhaft, ein Lineal, am bequemsten eine Reißschiene zu verwenden, auf der man den logarithmischen Maßstab in sich verschieben kann. Dazu muß das Blatt natürlich auf einem Reißbrett befestigt sein.

Zur Erleichterung der Bestimmung des Stellenwertes von h sind an der Kurve h die Stellen, wo $\frac{1}{2} \sin 2\alpha = 0,1$, bzw. $= 0,01$ ist, bezeichnet.

Für die meisten Zwecke wird eine Einheit von 12,5 cm auf der y -Achse und eine Darstellung des Winkelgrades durch 12 mm ausreichende Genauigkeit ermöglichen. Es genügt, das Blatt für Winkel bis zu 25° anzulegen, weil größere Winkel beim Tachymetrieren so selten vorkommen, daß es nicht ins Gewicht fällt, wenn man für sie mit dem gewöhnlichen Rechenschieber rechnet.

Die Handhabung des Kurvenblattes wird auch von ungeschulten Kräften sofort begriffen und richtig ausgeführt. Auch für den mit dem Rechenschieber Vertrauten ist sie übersichtlicher, schneller, bequemer und sicherer als der Sonderschieber.

Innsbruck.

L. Victoris.

Transformation der Grenzschichtgleichung bei dem Problem des schräg angeblasenen Zylinders durch Anwendung von Funktionaldeterminanten.

L. P r a n d t l¹⁾ hat bekanntlich im Falle des ebenen Grenzschichtproblems gezeigt, daß durch Einführung des „Gesamtdruckes“: $G = p + \rho \frac{u^2}{2}$ die nicht-lineare

Differentialgleichung des Problems auf eine Gleichung vom Typus der Wärmeleitungsgleichung für die Funktion G , nämlich auf: $G_x = \text{const.} \cdot u \cdot G_{yy}$ zurückgeführt werden kann. In dieser Gleichung sind alle auftretenden variablen Größen als Funktionen von x (i. e. die Wandbogenlänge des Profils vom Standpunkt ab gerechnet) und y (i. e. die Stromfunktion des ebenen Problems) zu betrachten. ρ bedeutet die Dichte, p die Druckfunktion und u die x -Komponente des Geschwindigkeitsvektors $w = \{u, v\}$.

Bedeutet nun x und y die üblichen Grenzschichtkoordinaten, x also die Wandbogenlänge und y den senkrechten Abstand von der Profilwand, so reduziert sich das Problem für den schräg angeblasenen Zylinder von unendlicher Länge auf folgende Differentialgleichung für die dritte Komponente $w(x, y)$ in Richtung der Zylindererzeugenden des Geschwindigkeitsvektors w :

$u(x, y) w_x(x, y) + v(x, y) w_y(x, y) = \nu \cdot w_{yy}(x, y)$ (1)
($\nu = \text{const.} = \text{kinematische Zähigkeit}$). Die übrigen Grenzschichtgleichungen verhalten sich wie im zweidimensionalen Fall. Denn zu den Gleichungen des Problems der ebenen laminaren Grenzschicht um einen Zylinder: $u \cdot u_x + v \cdot v_y = U(x) \cdot U'(x) + \nu \cdot u_{yy}$ und $u_x + v_y = 0$, wobei $U(x)$ die Potentialströmungsgeschwindigkeit am äußeren Rande der Grenzschicht bedeutet, tritt noch eine dritte Geschwindigkeitskomponente w in Richtung der z -Achse (parallel der Zylinderachse) hinzu. Die Komponente W der äußeren Potentialströmung, die entsprechend hinzukommt, ist konstant. Nach wie vor ist $U = U(x)$. Daher ist $w = w(x, y)$, d. h. von z unabhängig. Für (1) gilt somit: $w = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$. Man kann also²⁾, nach Ermittlung von u und v aus den unverändert gebliebenen Gleichungen des ebenen Problems, $w(x, y)$ aus der linearen Differentialgleichung (1) berechnen³⁾. Wenn dann nach wie vor $\psi(x, y)$ die Stromfunktion des ebenen Problems bedeutet, so gilt: $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Es wird also aus (1):

$$\psi_y w_x - \psi_x w_y = \nu w_{yy} \dots \dots (2).$$

Diese Gleichung schreiben wir mit Hilfe von Funktionaldeterminanten und erhalten:

$$\frac{D(w, \psi)}{D(x, y)} = \frac{D(x, \nu w_y)}{D(x, y)} \dots \dots (3).$$

Auf Grund der bekannten Rechenregeln über Funktionaldeterminanten ergibt sich dann weiter:

$$\frac{D(w, \psi)}{D(x, \nu w_y)} = 1 \dots \dots (4),$$

und schließlich, wenn wir x und ψ als neue unabhängige Variable einführen:

$$\frac{D(w, \psi)}{D(x, \psi)} = \frac{D(x, \nu w_y)}{D(x, \psi)} \dots \dots (5).$$

¹⁾ L. P r a n d t l: „Zur Berechnung der Grenzschichten“. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 77–82.

²⁾ Die genaue Behandlung dieser Differentialgleichung und eine Anwendung findet man bei: H. J. L u e k e r t, „Über die Integration der Differentialgleichung einer Gleichschicht in zäher Flüssigkeit“. Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Berlin. Bd. 1 (1933), S. 245–274.

³⁾ Dies t merkte bereits L. P r a n d t l in seiner Arbeit „Über die Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen“, enthalten in der nicht im Druck erschienenen Festschrift, Albert Betz zum 60. Geburtstag, 25. Dezember 1945“, S. 134–141.

⁴⁾ Bei den bekannten „ähnlichen“ Lösungen des ebenen Problems (siehe etwa bei W. M a n g l e r: „Die ähnlichen Lösungen der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen“, diese Zeitschrift, Bd. 23 (1943), S. 241 bis 251) führt diese Berechnung auf einfache Quadraturen. Die nicht schwierige Rechnung möge hier übergangen werden.

Ausgeschrieben bedeutet dies aber:

$$w_x = v \cdot w_y \quad (6).$$

Ist nun $w(x, y)$ stetig und differenzierbar in x und y , so gibt es eine Funktion $H(x, y)$ derart, daß

$$H_x = v \cdot w_y \quad (7)$$

und

$$H_y = w \quad (7').$$

Wegen: $\psi = \psi(x, y)$ ist $y = \varphi(x, \psi)$, wobei $\psi_y \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Aus (6), (7) und (7') folgt nun sofort:

$$v \cdot (H_y)_y = H_x \quad (8).$$

und wegen $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ schließlich die Gleichung

$$v \psi_y H_{yy} = H_x \quad (9).$$

Hierbei ist $\psi_y = \psi_y(x, y) = \psi_y(x, \varphi(x, \psi))$ eine bekannte Funktion in x und ψ , während $H(x, \psi)$ aus (9) zu berechnen ist.

Damit ist auch unser Problem auf einen Ausdruck vom Typus der Wärmeleitungsgleichung zurückgeführt, wobei naturgemäß die Randbedingungen ganz andere sind als in dem — eingangs zitierten — Prandtl'schen Ansatz für das ebene Problem.

Karlsruhe/Baden.

Hans Schubart.

Ein Verfahren zur näherungsweise Längenbestimmung unregelmäßiger Kurvenzüge.

E. Barbier hat 1860 einen besonderen Weg zur Lösung des Buffonschen Nadelproblems gefunden, mit Hilfe dessen es aber auch möglich ist, die Länge eines gegebenen, in beliebiger Weise verschlungenen Kurvenzuges zu bestimmen. Barbier formuliert zunächst folgende Aufgabe: eine beliebige polygone, geschlossene oder offene Linie werde willkürlich auf ein System äquidistanter paralleler Geraden geworfen. Welches ist die mathematische Erwartung E eines Spielers, der für jeden Schnittpunkt einen Franken erhalten soll?

Die mathematische Erwartung setzt sich additiv aus denjenigen für die einzelnen Teilstrecken zusammen und wird damit proportional der Gesamtlänge L des Linienzuges, d. h. $E = kL$. Im Grenzfall unendlich kleiner Teilstrecken gilt das gleiche auch für eine beliebig gekrümmte Kurve. Nimmt man nun an, diese sei ein Kreis vom Umfang $a\pi$, dessen Durchmesser gleich dem Parallelabstand a ist, so werden bei jedem Wurf gerade 2 Schnittpunkte entstehen, womit die mathematische Erwartung

$$ka\pi = 2 \text{ und damit } k = \frac{2}{a\pi}$$

wird. Für eine beliebige Linie erhält man damit $E = \frac{2L}{a\pi}$.

E ist aber die Zahl der zu erwartenden Schnittpunkte,

womit man die Kurvenlänge $L = \frac{Ea\pi}{2}$ bekommt, wenn

man die Kurve mit einem System paralleler Geraden überdeckt und die Schnittpunkte aus zählt. Man hat hier also eine einfache Methode, die Länge besonders

unregelmäßiger Konturen (z. B. geographische Grenzen) oder verschlungener Kurven auszumessen. Wenn diese nicht unmittelbar auf Millimeterpapier gezeichnet vorliegen, überdecke man sie mit einem quadratischen Netz (etwa auf Glasplatte), zählt zuerst die Schnittpunkte E mit den Waagerechten aus, stellt die Schnitte mit den Senkrechten fest und nimmt das arithmetische Mittel beider E -Werte. Der Einfluß der zufälligen Orientierung der Kurve gegenüber dem Netz kann noch weiter reduziert werden, wenn man L auch für die zwischen 0 und 90° befindlichen Lagen des Parallelsystems ermittelt.

Das Verfahren wird insbesondere dort von Nutzen sein, wo die auszumessende Kurve nicht auf dem Papier gegeben ist, sondern etwa in einem optischen Gerät erscheint. Ein ins Okular gelegtes Netz gestattet die Auszählung dann in gleich bequemer Weise.

Mittweida.

Helmut Lindner.

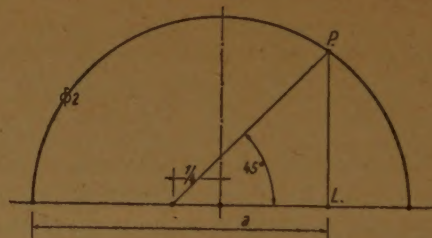
Eine einfache Näherungskonstruktion für die Zahl π .

Die von Kochanski 1885 angegebene Näherungskonstruktion für die Zahl π stellt mittels einer einfachen geometrischen Konstruktion den Zahlenwert

$$\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = 3.14153 \dots \text{ dar, also } \pi \text{ mit einem}$$

Fehler von $6 \cdot 10^{-5}$, der weit unterhalb der Schranken der Zeichengenauigkeit liegt. (Die Konstruktion ist z. B. dargestellt in Reutter, Darst. Geom. Bd. 1, S. 64.)

Hier soll eine andere Näherungskonstruktion mitgeteilt werden, die zwar nicht so genau ist wie die von Kochanski, dafür aber konstruktiv noch einfacher. Wir gehen dazu aus von dem Näherungswert für $\pi/2$, nämlich $a = 1/8 \cdot (7 + \sqrt{31}) = 1.5710 \dots$ mit einem Fehler von $2 \cdot 10^{-4}$, also ebenfalls weit unter der Schranke der Zeichengenauigkeit.



Diese Zahl läßt sich konstruktiv sehr einfach darstellen: Einen Kreis vom Radius 1 schneidet man mit einer Geraden, deren Neigung 45°, die den horizontalen Durchmesser links vom Mittelpunkt im Abstand 1/4 trifft. Lotet man den Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis rechts vom Mittelpunkt (P) auf den horizontalen Durchmesser herab (L), so stellt der linke Abschnitt des Durchmessers die Strecke „a“ dar.

Heppenheim a. d. B. Dipl.-Ing. Heinrich Müller.

BUCHBESPRECHUNGEN

Karl Reicheneder, Fehlertheorie und Ausgleichung von Rautenkettens in der Nadirtriangulation. (Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts in Potsdam.) 98 Seiten, mit 10 Abb., Berlin 1949, Akademie-Verlag. Preis brosch. 11,— DM.

In dieser neuesten Veröffentlichung von Reicheneder wird die Fehlertheorie und die strenge Ausgleichung von Rautenkettens in neuartiger, sowohl der Photogrammetrie und Geodäten, als auch den Mathematikern interessierender Darstellungsweise behandelt.

Mathematisch interessant dürfte u. a. die Darstellung der Querfehler in der ausgeglichenen Rautenkette durch

algebraische Funktionen, und vor allem die weitgehende Benutzung des von geeigneten abkürzenden Bezeichnungen Gebrauch machenden „Indizes-Kalküls“ sein.

Der Photogrammeter wird es besonders zu schätzen wissen, daß durch Entwicklung eines auf die strenge Ausgleichung in Rautenkettens gemessener Richtungen bezüglichen Verfahrens eine auf dem Gebiet der Radialtriangulation bisher vorhandene Lücke geschlossen wird, und daß durch schematische Abwicklung des betreffenden Rechnungsgangs und angegebene Tabellen dabei gebrauchter numerischer Werte sich wesentliche Erleichterungen für die praktische Anwendung des Verfahrens ergeben. Beim gegenwärtigen

Stand der Radialtriangulation bleibt es immerhin fraglich, ob diese Vorzüge genügen, um die praktische Anwendung des Verfahrens im Hinblick auf die recht mäßige Genauigkeit der betreffenden Beobachtungen gerechtfertigt erscheinen zu lassen. Auch ist zu bedenken, daß die in Betracht kommenden Beobachtungsfehler nicht ganz unbedeutende systematische Komponenten enthalten, die grundsätzlichen Voraussetzungen für strenge Ausgleichung nach der M. d. kl. Q. also nicht recht erfüllt sein mögen.

Dresden.

A. Buchholz.

Dr.-Ing. Ludwig Föppl (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München), *Die strenge Lösung für die rollende Reibung*. 44 S. mit 13 Bildern. München 1947. Leibniz-Verlag, bisher Verlag R. Oldenbourg. Preis brosch. 6,— DM.

Der Verf. greift das Problem der Verteilung von Druck- und Schubspannungen in der Berührungsfläche zwischen Rad und Schiene (die aus gleichem Material bestehend vorausgesetzt werden) von neuem auf und gibt eine rechnerisch befriedigende Darstellung.

Zunächst wird die bei Anwesenheit einer tangentialen Kraft sich ergebende Schubspannungsverteilung errechnet unter der Annahme, daß über die gesamte Berührungsfläche hinweg Haften eintritt, und gezeigt, daß unter dieser Annahme die Spannungen an der Ablaufseite unbeschränkt werden; ein Haften über die ganze Fläche kann also nicht eintreten. Sodann wird die Schubspannungsverteilung errechnet unter der Annahme, daß über die ganze Berührungsfläche hinweg Gleiten eintritt.

Nach Erledigung dieser beiden Grenzfälle wird vorausgesetzt, daß die Berührungsfläche sich aufteilt in einen vorderen Anteil, in dem Haften, und in einen hinteren Anteil, in dem Gleiten („Schlüpfen“) eintritt. Um eine Spannungsverteilung zu erhalten, die alle erforderlichen Randbedingungen erfüllt, werden (mit insgesamt sieben offenen Parametern) drei Spannungsverteilungen von der Art, wie sie sich aus den vorher betrachteten Grenzfällen ergeben hatten, überlagert. Aus den Betrachtungen über die Schubspannungen können sechs der eingeführten Parameter bestimmt werden; zur Bestimmung des letzten muß die Druckverteilung mit herangezogen werden.

Aus der Druckverteilung läßt sich auch das Moment gewinnen. Man erhält für dieses Moment den folgenden Ausdruck, die „Hauptgleichung“ der Theorie

$$M = A\alpha N + A \frac{T}{\mu_0} \frac{\sqrt{1-\alpha} + 2\alpha - (1+\alpha)[\sqrt{\alpha} + (\alpha/2n)]}{3\sqrt{\alpha} + (\alpha/2n) - 2} \quad (1),$$

darin bezeichnet N die Normalkraft, T die Tangentialkraft, M das Moment, A die Länge der gesamten Berührungsfläche, α das Verhältnis von „Schlüpfanteil“ zu „Haftanteil“ der Berührungsfläche, n die Abkürzung $n = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ und μ_0 den Reibungskoeffizienten beim Gleiten. Bei gegebenen Werten von N , T und M ist (1) eine Bestimmungsgleichung für α , so daß die Aufteilung der Berührungsfläche angegeben wird.

Bei der Diskussion der „Hauptgleichung“ zeigt es sich, daß $\alpha = 0,64$ ein ausgezeichneter Wert ist, und daß für alle von Null verschiedenen Tangentialkräfte T dieser Wert sich einstellen muß. Das Verhältnis $\mu = T/N$, bis zu welchem die Tangentialkraft ansteigen kann, wird zu $\mu/\mu_0 = 1,136$ ermittelt.

Der Verf. zieht noch einen Vergleich des Schlupfes, der sich aus $\alpha = 0,64$ errechnet, mit Messungen von G. Sachs (ds. Zs. 4 [1924] S. 1) und findet gute Übereinstimmung.

Schließlich wird auch noch der Fall untersucht, daß beim gebremsten Rad der Bremsklotz auf der Ablaufseite so tief sitzt, daß die im Rad erzeugten Schubspannungen auf der Ablaufseite (dem Betrage nach) erheblich über jenen der auflaufenden Seite liegen.

Von seinen Vorgängern hat der Verfasser vor allem die Tatsache übernommen, daß die Berührungsfläche sich

aufteilt in ein Haft- und ein Gleitgebiet; er übertrifft andererseits seine Vorgänger durch die Geschlossenheit einer neuen Darstellung und die Prägnanz der Ergebnisse.

Karlsruhe.

Karl Klotter.

Dipl.-Ing. Dr. phil. Albert Betz (Dir. des Max-Planck-Instituts für Stromungsforschung und Prof. a. d. Univ. Göttingen), *Konforme Abbildung*. VIII und 359 S. mit 276 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948. Springer-Verlag. Preis brosch. 36,— DM.

Dieses schon seit langem erwartete Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser 1932/33 vor Hörern hielt, die mit den Grundlagen der konformen Abbildung bekannt gemacht werden sollten, bei denen aber keine weitergehenden Kenntnisse der Funktionentheorie voraussetzen waren. Es geht von der geometrischen Anschauung aus, ohne zunächst den Begriff der komplexen Zahlen zu verwenden. Um die Zuordnung zweier Ebenen anschaulicher zu machen, benutzt es in der Hauptsache die flächenhafte Verteilung elektrischer Ströme. Durch Überlagerung solcher Verteilungen und durch Vergleich zweier Verteilungen gewinnt Verfasser verhältnismäßig komplizierte Abbildungen. Nachdem dabei gleichzeitig eine Reihe von Begriffen der Funktionentheorie eingeführt sind, werden erst jetzt mit komplexen Funktionen eine Reihe von Abbildungen behandelt, die durch einfache Funktionen gewonnen werden. Dabei wird immer das Anschauliche und die Anwendung hervorgehoben. So werden die wichtigsten Aufgaben der Stromungstheorie untersucht, z. B. Strömungen um Tragflügel, Abbildung kreisähnlicher Figuren, Zusammenhang zwischen Profilform und Geschwindigkeitsverteilung usw. U. a. wird hier ein bisher nicht veröffentlichtes Verfahren von Wittich-Riegels zur Abbildung von Tragflügelprofilen auf Kreise angegeben. Die beiden letzten Abschnitte sind der Abbildung durch doppelperiodische Funktionen und den freien Strahlen gewidmet.

So ist ein Buch entstanden, das einen Überblick über die wichtigsten Verfahren der konformen Abbildung und ihre hauptsächlichsten Anwendungen gibt, ausgehend von leicht verständlichen, anschaulichen Methoden, fortschreitend zu recht weitgehenden Problemen. In hervorragender Weise erfüllt das Buch seinen Zweck, allen, die konforme Abbildung gebrauchen eine Anleitung zu ihrer praktischen Verwendung zu geben. Darüber hinaus vermittelt es eine sehr anschauliche Einführung in entsprechende Teilgebiete der Funktionentheorie.

Dresden.

Willers.

Dr. R. Rothe, ehem. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure*.

Teil I. *Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen* (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 21). 8. Aufl. 208 S. mit 161 Abb. Leipzig 1948. Verlagsgesellschaft B. G. Teubner. Preis: kart. 6,20 DM.

Teil II. *Integralrechnung, Unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen* (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 22.) 6. Aufl. 208 S. mit 98 Abb. Leipzig 1949. Verlagsgesellschaft B. G. Teubner. Preis: kart. 6,20 DM.

Teil IV, Heft 1/2. *Unter Mitwirkung von Studienrat O. Degosang, Bielefeld: Übungsaufgaben und Lösungen*. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 33/34.) 5. Aufl. 109 S. mit 97 Abb. Leipzig 1949. Verlagsgesellschaft B. G. Teubner. Preis: kart. 3,50 DM.

Teil IV, Heft 3/4. *Unter Mitwirkung von Studienrat O. Degosang, Bielefeld: Übungsaufgaben*

mit Lösungen. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 35/36.) 4. Aufl. 108 S. mit 51 Abb. Leipzig 1949. Verlagsgesellschaft B. G. Teubner. Preis: kart. 3,40 DM.

Es wird allgemein sehr begrüßt werden, daß die ausgezeichneten Lehrbücher von Rothe wieder vorliegen. Rothe hat es verstanden, den Stoff von Anfang an so auszuwählen und darzustellen, daß sich seit der ersten Auflage wesentliche Änderungen nicht erforderlich gemacht haben. Diese wurden von Trefftz (Teil I, 1. Aufl. Z. angew. Math. Mech. VIII 336/337, 4. Aufl., Z. angew. Math. Mech. XIII, 391, Teil II, 1. Aufl., Z. angew. Math. Mech. IX, 165) und von Größ (Teil IV, 3. Z. angew. Math. Mech. XVII, 309) angezeigt. Man kann nur wiederholen, was dort gesagt wurde: Die Bändchen bieten einen im Verhältnis zum Umfang fast überreichen Inhalt an Theorie und vielseitigen Anwendungen in ausgezeichneter Darstellung. Allerdings machen sie es dem Benutzer nicht immer leicht, eignen sich daher weniger zum Selbststudium als zum Gebrauch neben Vorlesungen. Auf jeden Fall fordert ihr Studium intensivste Mitarbeit. Erfreulicherweise wird, wie der Verlag mitteilt, die Neuauflage in nächster Zeit durch Wiedererschienen des Bandes III, der fehlenden

Aufgabenhefte und der Formelsammlung zum Abschluß gebracht werden.
Dresden. Willers.

Dr. Konrad Knopp (o. Prof. der Mathematik a. d. Univ. Tübingen), Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (Grundlehren der mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. II). 4. Aufl. XII + 582 S. mit 14 Abb. Berlin und Heidelberg 1947. Springer-Verlag. Preis brosch. 39,60 DM.

Erfreulicherweise hat der Verlag jetzt eine neue Auflage dieses trefflichen Buches herausgebracht. „Mit Rücksicht auf die Zeitverhältnisse wurde in dieser 4. Auflage von größeren Änderungen abgesehen.“ Die neue Auflage ist also ein sorgfältig durchgesehener, in zahlreichen Einzelheiten verbesserter, im großen und ganzen aber unveränderter Abdruck der 3. in Band 14 (1934) Seite 190 dieser Zeitschrift von v. Mises angezeigten Auflage. Das Buch ist nicht nur in Kreisen der Mathematiker, sondern auch bei Physikern und Ingenieuren so bekannt und geschätzt, daß sich eine Empfehlung erübrigt.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten)

Ernst Schörner, Mathematische Plastoskop-Modelle für den Unterricht in der räumlichen und darstellenden Geometrie und in den Grundlagen des technischen Zeichnens. (Herausgeg. von Max Wendt.) Teil III: Flächen, die Geraden enthalten. 14 Abb. Berlin und Randsdorf. 1947. Verlagsgesellschaft Dreyer & Co.

Dr.-Ing. Max Schuler (ehem. ao. Prof. a. d. Univ. Göttingen), Mechanische Schwingungslehre. Teil I: Einfache Schwinger (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften, herausgeg. von Dr. Henry Pöltz). 168 S. mit 123 Abb. Wolfenbüttel und Hannover. 1949. Wolfenbütteler Verlagsanstalt. Preis kart. 6,— DM-West.

Wolfgang Gröbner (o. Prof. a. d. Univ. Innsbruck) und **Nikolaus Hofreiter** (ao. Prof. a. d. Univ. Wien), Integraltafel(erster Teil): Unbestimmte Integrale. VIII + 166 S. Wien und Innsbruck 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 18,— DM, 5,40 \$.

Heinrich W. E. Jung, Mathematische Abhandlungen. 8 S. (Hallische Monographien, her-

ausgegeben von Otto Eisfeld.) Halle 1948. Verlag Max Niemeyer. Preis geh.: 2,20 DM.

Dr.-Ing. W. Kaufmann (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München), Statik der Tragwerke (Handbibliothek für Bauingenieure. Begründet von Robert Otzen). 3. Auflage. VIII + 314 S. mit 364 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 25,50 DM.

Berichtigungen:

Bei der Besprechung der Tafelwerke von E. m. d. e. in Band 29 Seite 128 dieser Zeitschrift ist versehentlich der Titel des ersten Bandes:

Dr. Fritz Emde (Prof. für Elektrotechnik i. R. a. d. TH. Stuttgart), Tafel elementarer Funktionen (2. Auflage), XII + 181 S. mit 83 Abb. Leipzig 1948. Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 11,60 DM fortgeblieben.

H. Heinrich, Genauigkeit für die Halbschrittverfahren der graphischen Integration. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949) 51—52.

In dem Aufsatz soll es überall Halbschritt-, nicht Halbschnittverfahren heißen.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Berichtigung zur kleinen Mitteilung: C. Weber, Zur nichtlinearen Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 189—199.

Bei den Ausführungen hat sich eine Reihe von Schreibfehlern eingeschlichen, so daß die Ergebnisse ebenfalls zu berichtigen sind. Herr Dr. Hans Kauderer hat mich auf diese Fehler aufmerksam gemacht und ich spreche ihm hiermit meinen Dank aus. Die von Herrn Dr. Hans Kauderer berichtigten Gleichungen lauten wie folgt:

$$\text{Gl. (11)} \quad \sigma_1 = \frac{\partial A}{\partial J_1} + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_m) \frac{\partial A}{\partial J_2} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial A}{\partial J_3}$$

$$\text{Gl. (14)} \quad \sigma_1 - \sigma_m = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_m) \frac{\partial A(J_1 J_2)}{\partial J_2}$$

$$\text{Gl. (17)} \quad \sigma_1 - \sigma_m = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_m) \frac{\partial A_2(J_2)}{\partial J_2}$$

$$\text{Gl. (18)} \quad \sigma_m = \frac{\partial A_1(J_1)}{\partial J_1}$$

$$\text{Gl. (19)} \quad \sigma_m = f_m(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\text{Gl. (20)} \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_m}{\varepsilon_1 - \varepsilon_m} = f[(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_m)^2]$$

Die Annahmen Va und Vb lauten dann wie die abgeänderten Gl. (19) und (20).

Der Hauptgedanke der kleinen Mitteilung durch immer weitergehende einschränkende Annahmen über die Zerrungsenergie, das Gesetz für den Zusammenhang zwischen Zerrungstensor und Spannungstensor abzuleiten, bleibt voll erhalten.

Schlewecke (Nette).

C. Weber.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin, Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: 42 35 02, 42 64 12 und 42 69 18. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/29/7—8. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15.— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6.—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, anderenfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. 57 273/4022 — Nr. 506. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.

Printed in Germany. Offsetnachdruck TVV Werk II Langensalza